TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC HUẾ, Số 50-2009

GIẢ JACOBIAN VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM VECTƠ LIÊN TỤC

Phan Nhật Tĩnh,
Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế
Hoàng Phước Lợi
Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế

Tóm tắt. *Trong bài báo này, khái niệm giả Jacobian, một dạng đạo hàm suy rộng do V. Jeyakumar và Đinh Thế Lục đề xuất sẽ được giới thiệu cùng với một số ứng dụng của nó. Đầu tiên là mối quan hệ giữa giả Jacobian và dưới vi phân hàm vectơ lồi sẽ được đề cập cùng với một số ví dụ minh họa cho mối quan hệ này. Cũng trong bài báo này, các định lý điều kiện cần để hàm vectơ đạt cực tiểu địa phương cũng được thiết lập nhờ công cụ giả Jacobian. Các định lý này là một sự mở rộng cho các định lý điều kiện cần để hàm vô hướng đạt cực tiểu địa phương mà ta đã biết.*

1 Giới thiệu

Một kết quả quen thuộc của giải tích cổ điển là nếu $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ khả vi Gâteaux tại x_0 và đạt cực tiểu địa phương tại x_0 thì $0 = \nabla f(x_0)$. Sau này, với sự ra đời các khái niệm đạo hàm suy rộng cho các hàm không khả vi (theo nghĩa cổ điển) thì kết quả trên cũng được mở rộng. Với hàm lồi thì ta đã biết rằng $0 \in \partial^{ca} f(x_0)$ trong đó $\partial^{ca} f(x_0)$ là dưới vi phân của f tại x. Kết quả cũng tương tự khi f Lipschitz địa phương và $\partial^{ca} f(x_0)$ được thay bằng dưới vi phân Clarke $\partial^C f(x_0)$ hoặc dưới vi phân Michel-Penoit $\partial^{MP} f(x_0)$ (xem [3]).

Trong bài báo này, ta sẽ mở rộng các kết quả đã biết cho trường hợp hàm vectơ liên tục nhờ công cụ là giả Jacobian. Để thực hiện điều này, chúng ta sẽ dành mục 2 cho việc nêu định nghĩa giả Jacobian của hàm vectơ liên tục, một số tính chất cơ bản của nó cùng với một số ví dụ phục vụ cho các mục sau. Trong mục 3, chúng ta sẽ giới thiệu về thứ tự suy rộng cho không gian $\mathbb{R}^m$ được xây dựng nhờ một nón lồi K. Với thứ tự đó một lớp hàm suy rộng của lớp hàm lồi vô hướng, đó là lớp hàm vectơ lồi cùng với dưới vi phân của nó cũng được nêu lại trong mục này. Ta đã biết rằng một hàm vectơ lồi trên $\mathbb{R}^n$ thì dưới vi phân của nó tại mỗi điểm luôn là tập lồi, compact khác rỗng (xem [7]). Kết quả chính của mục 3 sẽ là thiết lập mối quan hệ giữa dưới vi phân hàm vectơ lồi với giả Jacobian. Cụ thể là chúng ta có thể khẳng định rằng dưới vi phân của hàm vectơ lồi tại một điểm cũng chính là một giả Jacobian của nó tại điểm đó. Ta cũng sẽ chỉ ra ví dụ định lượng để thấy rằng dưới vi phân hàm vectơ lồi không hẳn là giả Jacobian lồi compact bé nhất theo quan hệ bao hàm. Đây là một kết quả khá thú vị vì dưới vi phân hàm vectơ lồi phụ thuộc vào thứ tự sinh bởi một nón lồi trên $\mathbb{R}^m$ trong khi giả Jacobian thì không phụ thuộc vào thứ tự đó. Mục 4 và cũng là một trong những kết quả chính của bài báo, sẽ là sự mở rộng các định lý điều kiện cần cực trị đã biết đối với hàm vô hướng cho trường hợp hàm vectơ (thể hiện ở định lý 4.2 và định lý 4.6). Các kết quả tương tự đã biết của hàm vô hướng, hàm khả vi Gâteaux và hàm vectơ lồi cũng sẽ được nêu lại như là những trường hợp đặc biệt hoặc là những hệ quả của các định lý này.

2 Định nghĩa và một số tính chất cơ bản

Ký hiệu $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ là không gian các ma trận thực cấp $m \times n$. Mỗi ma trận M cấp $m \times n$ có thể được xem như là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$, vì vậy với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$, ta có $M(x) \in \mathbb{R}^m$. Chuyển vị của ma trận M được ký hiệu là M^{tr} và được xem như là ánh xạ tuyến tính từ R^m vào $\mathbb{R}^n$. Đôi khi ta cũng viết vM với $v \in \mathbb{R}^m$ thay cho $M^{tr}(v)$. Trên $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ được trang bị chuẩn của ánh xạ tuyến tính cho bởi

$$\|M\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|M(x)\|.$$

Chuẩn này tương đương với chuẩn Euclide

$$|M| = \left(\|M_1\|^2 + \cdots \|M_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

trong đó $M_1, \ldots, M_n$ là các dòng của ma trận M. Hình cầu đơn vị đóng trong $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ được ký hiệu là $B_{m \times n}$.

Cho $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số và $x, u \in \mathbb{R}^n$ cho trước. Đạo hàm theo hướng Dini trên của ϕ tại x theo hướng u, ký hiệu là $\phi^+(x; u)$, được xác định bởi

$$\phi^+(x; u) := \limsup_{t \downarrow 0} \frac{\phi(x + tu) - \phi(x)}{t}.$$

Tương tự như vậy, đạo hàm theo hướng Dini dưới của ϕ tại x theo hướng u, ký hiệu là $\phi^-(x; u)$, được xác định bởi

$$\phi^-(x; v) := \liminf_{t \downarrow 0} \frac{\phi(x + tu) - \phi(x)}{t}.$$

Các giới hạn trên có thể nhận giá trị thực mở rộng $+\infty$ và $-\infty$. Khi $\phi^+(x;u) = \phi^-(x;u)$ thì các giá trị đó được ký hiệu chung là $\phi'(x;u)$ và gọi là đạo hàm theo hướng của ϕ tại x theo hướng u. Nếu điều này đúng với bất kỳ hướng u thì hàm ϕ được gọi là khả vi theo hướng tại x.

Với hàm vectơ $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, đạo hàm theo hướng của f tại x theo hướng u được xác định bởi

$$f'(x;u) := \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}.$$

Khi $f'(x;u)$ tồn tại với mọi $u \in \mathbb{R}^n$ thì hàm f được gọi là khả vi theo hướng tại x. Nếu $f_1, \ldots, f_m$ là các thành phần của f thì từ định nghĩa ta suy ra rằng f khả vi theo hướng tại x khi và chỉ khi các hàm thành phần $f_1, \ldots, f_m$ cũng khả vi theo hướng tại điểm này.

Hàm $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ được gọi là *khả vi Gâteaux* tại x nếu tồn tại ma trận M cấp $m \times n$ sao cho với mọi $u \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} = M(u).$$

Khi đó M được gọi là *đạo hàm Gâteaux* của f tại x.

Nếu f khả vi Gâteaux tại x thì đạo hàm Gâteaux M của nó trùng với ma trận Jacobian $\nabla f(x)$ của f tại x. Điều ngược lại cũng đúng, nghĩa là nếu f khả vi theo hướng tại x thì hàm $f'(x;u)$ tuyến tính theo biến u, khi đó f khả vi Gâteaux tại điểm này và $\nabla f(x)(u) = f'(x;u)$ với mọi $u \in \mathbb{R}^n$.

Giả sử rằng $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là hàm vectơ Lipschitz địa phương tại x, tức là tồn tại lân cận U của x và một hằng số $k > 0$ (phụ thuộc vào x) sao cho

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \le k\|x_1 - x_2\| \quad \text{với mọi } x_1, x_2 \in U.$$

Lúc đó theo định lý Rademacher thì f khả vi hầu khắp nơi (theo độ đo Lebesgue) trên U. Nhờ vậy ta có thể định nghĩa Jacobian suy rộng Clarke của f tại x, ký hiệu là $\partial^C f(x)$ bởi

$$\partial^C f(x) := \operatorname{co}\left\{\lim_{i\to\infty} \nabla f(x_i) : x_i \in \Omega, x_i \to x\right\}$$

trong đó Ω là tập tất cả các điểm của U mà tại đó f khả vi.

Tập hợp

$$\partial^B f(x) := \left\{\lim_{i\to\infty} \nabla f(x_i) : x_i \in \Omega, x_i \to x\right\}$$

được gọi là B - dưới vi phân của f tại x.

Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Đạo hàm Michel-Penot theo hướng trên của f tại x theo hướng u được xác định bởi

$$f^{\diamond}(x;u) = \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \limsup_{t\downarrow 0} \frac{f(x+tz+tu) - f(x+tz)}{t}$$

và đạo hàm Michel-Penot theo hướng dưới của f tại x theo hướng u được xác định bởi

$$f_{\diamond}(x;u) = \inf_{z\in\mathbb{R}^n} \liminf_{t\downarrow 0} \frac{f(x+tz+tu) - f(x+tz)}{t}.$$

Dưới vi phân Michel-Penot của f tại x là tập hợp

$$\partial^{MP} f(x) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : f^{\diamond}(x;u) \geq \langle \xi, u\rangle \text{ với mọi } u \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dưới đây là định nghĩa về một dạng đạo hàm suy rộng cho hàm vectơ liên tục, được đề xuất bởi V. Jeyakumar và Đinh Thế Lục (xem [2], [3], [8]).

Định nghĩa 2.1 ([8], Definition 2.1)**.** *Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là một hàm vectơ liên tục. Tập đóng $\partial f(x) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ gồm các ma trận cấp $m \times n$ được gọi là giả Jacobian của f tại x nếu với mọi $u \in \mathbb{R}^n$ và với mọi $v \in \mathbb{R}^m$, ta có*

$$(vf)^+(x;u) \leq \sup_{M\in\partial f(x)} \langle v, M(u)\rangle \tag{1}$$

trong đó vf là hàm thực xác định bởi $vf := \langle v, f\rangle = \sum_{i=1}^{m} v_i f_i$.

Mỗi phần tử của $\partial f(x)$ được gọi là một ma trận giả Jacobian của f tại x. Nếu dấu đẳng thức ở (1) xảy ra thì $\partial f(x)$ được gọi là giả Jacobian chính quy của f tại x.

Nhận xét 2.1.

1. Từ định nghĩa ta suy ra rằng nếu $\partial f(x) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ là một giả Jacobian của f tại x, khi đó mọi tập đóng $A \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ chứa $\partial f(x)$ cũng là một giả Jacobian của f tại x. Như vậy toàn bộ không gian $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ là một giả Jacobian tầm thường của f tại bất kỳ $x \in \mathbb{R}^n$. Dĩ nhiên là ta cần những giả Jacobian càng nhỏ càng tốt.

2. Một dạng tương đương với định nghĩa của giả Jacobian là: tập đóng $\partial f(x)$ là giả Jacobian của f tại x khi và chỉ khi với mọi $u \in \mathbb{R}^n$ và mọi $v \in \mathbb{R}^m$ ta có

$$(vf)^-(x;u) \geq \inf_{M\in\partial f(x)} \langle v, M(u)\rangle. \tag{2}$$

3. Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là hàm vectơ liên tục và khả vi Gâteaux tại x. Khi đó $\{\nabla f(x)\}$ là một giả Jacobian của f tại x. Ngược lại, nếu f có một giả Jacobian tại x chỉ gồm một phần tử thì f khả vi Gâteaux tại điểm đó và đạo hàm của nó trùng với ma trận giả Jacobian này. Nếu f Lipschitz địa phương tại x thì Jacobian suy rộng Clark cũng là một giả Jacobian của f tại điểm này (xem [2], Proposition 1.1.4).

4. Hàm vectơ f có một giả Jacobian bị chặn tại x khi và chỉ khi f Lipschitz địa phương tại x. (Chứng minh có thể xem ở [2] hoặc [3]).

5. Khi $m = 1$ thì $\partial f(x)$ được xem như là một tập con của $\mathbb{R}^n$. Lúc đó ta gọi $\partial f(x)$ là giả vi phân của f tại x. Vì trên $\mathbb{R}$ chỉ có hai hướng là hướng dương và hướng âm định nghĩa của giả vi phân được đưa về hai bất đẳng thức
$$f^+(x;u) \leq \sup_{\xi \in \partial f(x)} \langle \xi, u \rangle \quad \text{và} \quad f^-(x;u) \geq \inf_{\xi \in \partial f(x)} \langle \xi, u \rangle, \tag{3}$$
với mỗi $u \in \mathbb{R}^n$. Dưới vi phân hàm lồi vô hướng và dưới vi phân Michel-Penoit là những ví dụ về giả vi phân.

Dưới đây là một số ví dụ về giả Jacobian của hàm vectơ để làm sáng tỏ Nhận xét 2.1, 4.

Ví dụ 2.2. Xét hàm $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cho bởi
$$f(x) = (|x|, |x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Với $u \in \mathbb{R}$ và $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, ta có
$$(vf)^+(0;u) = \limsup_{t \downarrow 0} \frac{v_1|tu| + v_2|tu|}{t} = v_1|u| + v_2|u|.$$
Đặt
$$\partial f(0) := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
ta có
$$\sup_{M \in \partial f(0)} \langle v, M(u) \rangle = \sup\{-v_1 u - v_2 u, v_1 u + v_2 u\} = v_1|u| + v_2|u|.$$
Từ đây suy ra $\partial f(0)$ là một giả Jacobian của f tại 0.

Trong ví dụ trên hàm f Lipschitz địa phương tại 0 nên giả Jacobian của f có thể là tập bị chặn. Ví dụ tiếp theo sẽ cho thấy giả Jacobian của một hàm không Lipschitz địa phương tại một điểm sẽ là tập không bị chặn.

Ví dụ 2.3. Xét hàm $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x) = (\sqrt{|x|}, |x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó f không Lipschitz địa phương tại 0. Với $u \in \mathbb{R}$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, ta có $vf = v_1\sqrt{|x|} + v_2|x|$ và

$$(vf)^+(0; u) = \limsup_{t\downarrow 0} \frac{v_1\sqrt{|tu|} + v_2|tu|}{t} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } v_1|u| > 0 \\ v_2|u| & \text{nếu } v_1|u| = 0 \\ -\infty & \text{nếu } v_1|u| < 0. \end{cases}$$

Đặt

$$\partial f(0) := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} : a \in (-\infty; 1] \cup [1; +\infty) \right\}.$$

Khi đó có thể thấy rằng với mọi $u \in \mathbb{R}$ và mọi $v \in \mathbb{R}^2$ thì

$$\sup_{M \in \partial f(0)} \left\langle v, M(u) \right\rangle \geq (vf)^+(0; u)$$

và do đó $\partial f(0)$ là một giả Jacobian không bị chặn của f tại 0.

3 Giả Jacobian của hàm vectơ lồi

Mục này nêu lên mối quan hệ giữa dưới vi phân của hàm vectơ lồi với giả Jacobian. Kết quả chính ở mục này là khẳng định dưới vi phân của hàm vectơ lồi tại một điểm cũng là một giả Jacobian của hàm vectơ tại điểm đó. Nhưng trước hết chúng ta cần nêu lại định nghĩa hàm vectơ lồi và dưới vi phân của nó.

Cho K là một nón lồi trong $\mathbb{R}^m$. Nón K được gọi là nhọn nếu $K \cap (-K) = \{0\}$. Nón cực của K là

$$K' := \{\xi \in L(\mathbb{R}^n, R) : \xi(c) \geq 0 \quad \text{với mọi } \ c \in K\}.$$

Mệnh đề sau nêu lên một tính chất của nón lồi đóng và nhọn. Chứng minh có thể tham khảo ở [1].

Mệnh đề 3.1. *Nếu $K \subset \mathbb{R}^n$ là nón lồi, đóng nhọn thì* $\mathrm{int}K' \neq \emptyset$.

Cho $K \subset \mathbb{R}^m$ là một nón lồi. Trên $\mathbb{R}^m$, định nghĩa quan hệ "$\succeq_K$" như sau:

$$x, y \in \mathbb{R}^m, x \succeq_K y \Longleftrightarrow x - y \in K.$$

Khi đó $\succeq_K$ có tính chất phản xạ, bắc cầu do đó là một thứ tự (bộ phận) trên $\mathbb{R}^m$. Ta cũng viết là $y \preceq_K x$ thay cho $x \succeq_K y$ và nếu không sợ nhầm lẫn ta sẽ viết "$\succeq$" thay cho "$\succeq_K$" (và "$\preceq$" thay cho "$\preceq_K$").

Hàm $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ được gọi là lồi (tương ứng với nón K) nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ và mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \preceq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Từ định nghĩa của hàm vectơ lồi ta suy ra rằng một hàm vectơ lồi tương ứng với nón K thì nó cũng lồi tương ứng với bất kỳ nón thứ tự lồi nào chứa K.

Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là một hàm vectơ lồi. Dưới vi phân của f tại $x \in \mathbb{R}^n$ được định nghĩa là tập hợp

$$\partial^{cv} f(x) := \{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : f(y) - f(x) \succeq A(y-x) \quad \text{với mọi } y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Khi $m = 1$ và nón $K = \mathbb{R}_+$ thì định nghĩa hàm lồi và dưới vi phân hàm vectơ lồi ở trên chính là định nghĩa đã biết của hàm lồi vô hướng. Khi đó, ta sẽ dùng ký hiệu $\partial^{ca} f(x)$ để chỉ dưới vi phân (theo nghĩa thông thường) của hàm lồi vô hướng $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tại x.

Hàm vectơ lồi từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ là hàm khả vi theo hướng tại mọi $x \in \mathbb{R}^n$ và $\partial^{cv} f(x)$ luôn là tập lồi compact khác rỗng (xem [7], Định lý 3.4.1). Tính liên tục của hàm vectơ lồi được cho ở mệnh đề sau.

Mệnh đề 3.2 ([7], Mệnh đề 2.1.3)**.** *Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là hàm vectơ lồi. Nếu nón thứ tự K lồi, đóng và nhọn thì f liên tục trên $\mathbb{R}^n$.*

Mệnh đề 3.2 khẳng định rằng một hàm vectơ lồi từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ thì liên tục trên $\mathbb{R}^n$ và do đó một cách tự nhiên, ta có thể xây dựng các giả Jacobian của nó tại mỗi $x \in \mathbb{R}^n$. Ta sẽ chỉ ra dưới đây rằng dưới vi phân $\partial^{cv} f(x)$ chính là một giả Jacobian của hàm vectơ lồi f tại x. Đây là một tính chất khá thú vị ở chỗ giả Jacobian của hàm vectơ f không phụ thuộc vào thứ tự trên $\mathbb{R}^m$ trong khi đó $\partial^{cv} f(x)$ lại phụ thuộc vào thứ tự được xây dựng dựa trên một nón lồi trong $\mathbb{R}^m$.

Định lý 3.3. *Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là hàm vectơ lồi (tương ứng với nón K) trong đó nón thứ tự K là lồi, đóng và nhọn. Khi đó, với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$, dưới vi phân $\partial^{cv} f(x)$ của f tại x là một giả Jacobian của hàm f tại điểm này.*

Chứng minh. Với mọi $u \in \mathbb{R}^n$ và $v \in \mathbb{R}^m$, ta sẽ chứng minh rằng

$$(vf)'(x;u) \leq \sup_{A \in \partial^{cv} f(x)} \big\langle v, A(u) \big\rangle. \tag{4}$$

Hiển nhiên là (4) đúng khi $v = 0$ do đó chỉ cần chứng minh cho trường hợp $v \neq 0$. Trước hết ta sẽ chứng minh rằng với mọi $v_0 \in K' \setminus \{0\}$ thì

$$(v_0 f)'(x; u) = \sup_{A \in \partial^{cv} f(x)} \big\langle v_0, A(u) \big\rangle. \tag{5}$$

Thật vậy, theo định nghĩa của đạo hàm theo hướng và tính liên tục của tích vô hướng, ta có

$$\begin{aligned}\big\langle v_0, f'(x; u) \big\rangle &= \left\langle v_0, \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} \right\rangle \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{(v_0 f)(x + tu) - (v_0 f)(x)}{t} = (v_0 f)'(x; u).\end{aligned}$$

Do đó áp dụng [6], Part 5, Theorem 23.4 và kết quả

$$\partial^{ca}(v_0 f)(x) = v_0 \partial^{cv} f(x)$$

ở [7], ta có

$$\begin{aligned}\big\langle v_0, f'(x; u) \big\rangle &= \sup\{B(u) : B \in \partial^{ca}(v_0 f)(x)\} \\ &= \sup\{B(u) : B \in v \partial^{cv} f(x)\} \\ &= \sup_{A \in \partial^{cv} f(x)} \big\langle v_0, A(u) \big\rangle\end{aligned}$$

và như vậy ta có (5).

Bây giờ với $v \in \mathbb{R}^m$ tùy ý và $v \neq 0$. Vì K lồi, đóng và nhọn nên $\mathrm{int} K' \neq \emptyset$ và do đó tồn tại $v_0 \in \mathrm{int} K'$. Lấy số dương λ đủ bé sao cho $v_0 + \lambda v \in K'$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}(v_0 f)'(x; u) + \lambda (v f)'(x; u) &= \big((v_0 + \lambda v) f\big)'(x; u) \\ &= \sup_{A \in \partial^{cv} f(x)} \big\langle v_0 + \lambda v, A(u) \big\rangle \\ &\leq \sup_{A \in \partial^{cv} f(x)} \big\langle v_0, A(u) \big\rangle + \lambda \sup_{A \in \partial^{cv} f(x)} \big\langle v, A(u) \big\rangle.\end{aligned}$$

Điều này cùng với (5) suy ra

$$(v f)^+(x; u) = (v f)'(x; u) \leq \sup_{A \in \partial^{cv} f(x)} \big\langle v, A(u) \big\rangle.$$

Vậy $\partial^{cv} f(x)$ là một giả Jacobian của f tại x. □

Đối với một hàm vectơ lồi thì dưới vi phân $\partial^{cv} f(x)$ của f tại x chưa hẳn là giả Jacobian lồi, compact bé nhất (theo quan hệ bao hàm) trong tất cả các giả Jacobian của f tại điểm này. Ví dụ sau đây cho thấy điều đó.

Ví dụ 3.4. Xét hàm $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cho bởi

$$f(x) = (|x|, |x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó f là hàm lồi tương ứng với nón $K = \mathbb{R}^2_+$. Bằng tính toán, ta có dưới vi phân của f tại 0 là

$$\partial^{cv} f(0) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : a \in [-1; 1], b \in [-1; 1] \right\}.$$

Theo Ví dụ 2.2 thì tập hợp

$$\partial f(0) := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

là một giả Jacobian của f tại 0. Hiển nhiên là $\mathrm{co}\partial f(0)$ là một giả Jacobian lồi, compact của f tại 0 thực sự chứa trong $\partial^{cv} f(0)$.

4 Điều kiện cần cực trị của hàm vectơ liên tục

Trong mục này, chúng ta sẽ nêu lên một số định lý điều kiện cần để hàm vectơ đạt cực tiểu địa phương tại một điểm. Đối với các hàm vô hướng thì các kết quả thu được là những trường hợp đặc biệt của các định lý này.

Định nghĩa 4.1. *Giả sử $\mathbb{R}^m$ được sắp thứ tự bởi một nón K lồi, đóng, nhọn và $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là một hàm vectơ liên tục. Khi đó $x_0 \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm cực tiểu địa phương của f (tương ứng với nón K) nếu tồn tại lân cận U của x_0 sao cho*

$$f(x) \succeq_K f(x_0) \quad \text{với mọi } x \in U.$$

Tương tự như vậy, điểm x_0 được gọi là điểm cực đại địa phương của f (tương ứng với nón K) nếu tồn tại lân cận U của x_0 sao cho

$$f(x) \preceq_K f(x_0) \quad \text{với mọi } x \in U.$$

Khi $m = 1$ và nón thứ tự K là nón $\mathbb{R}_+$ thì thứ tự $\succeq$ được thay bằng thứ tự thông thường và định nghĩa trên chính là định nghĩa của hàm vô hướng đạt cực tiểu (cực đại) địa phương mà ta đã biết. Trong các kết quả dưới đây, ký hiệu $\overline{\mathrm{co}}A$ được sử dụng để chỉ bao lồi đóng của tập A, đó là tập lồi đóng bé nhất chứa A.

Định lý sau là một mở rộng của [2], Theorem 2.1.13 về điều kiện cần để một hàm vectơ đạt cực tiểu địa phương.

Định lý 4.2. *Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là hàm vectơ liên tục tại x_0 và $\partial f(x_0)$ là một giả Jacobian của f tại điểm này. Khi đó, nếu f đạt cực tiểu địa phương tại x_0 (tương ứng với K) thì*

$$0 \in [\overline{\text{co}}\partial f(x_0)]^{tr}(v) \quad \text{với mọi } v \in K'.$$

Đặc biệt, khi $m = 1$ và $\mathbb{R}$ được sắp thứ tự bởi nón $\mathbb{R}_+$ thì $0 \in \overline{\text{co}}\partial f(x_0)$.

Chứng minh. Với $v \in K'$ và với mọi $u \in \mathbb{R}^n$. Vì f đạt cực tiểu địa phương tại x_0 nên $\dfrac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} \in K$ với $t > 0$ đủ bé. Do đó

$$\frac{(vf)(x_0 + tu) - (vf)(x_0)}{t} = \left\langle v, \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} \right\rangle \geq 0$$

với $t > 0$ đủ bé. Suy ra

$$(vf)^+(x_0; u) = \limsup_{t \downarrow 0} \frac{(vf)(x_0 + tu) - (vf)(x_0)}{t} \geq 0.$$

Điều này kết hợp với giả thiết $\partial f(x_0)$ là giả Jacobian của f tại x_0 dẫn đến

$$0 \leq (vf)^+(x_0; u) \leq \sup_{M \in \partial f(x_0)} \left\langle v, M(u) \right\rangle = \sup_{M \in \partial f(x_0)} \left\langle M^{tr}(v), u \right\rangle = \sup_{\xi \in [\partial f(x_0)]^{tr}(v)} \left\langle \xi, u \right\rangle.$$

Để ý rằng $[\overline{\text{co}}\partial f(x_0)]^{tr}(v)$ là tập lồi đóng. Nếu $0 \notin [\overline{\text{co}}\partial f(x_0)]^{tr}(v)$ thì theo định lý tách, tồn tại $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$ tách mạnh $\{0\}$ và $[\overline{\text{co}}\partial f(x_0)]^{tr}(v)$, tức là

$$0 > \sup_{\xi \in [\overline{\text{co}}\partial f(x_0)]^{tr}(v)} \left\langle \xi, u \right\rangle \geq \sup_{\xi \in [\partial f(x_0)]^{tr}(v)} \left\langle \xi, u \right\rangle$$

và điều này mâu thuẫn với $0 \leq \sup_{\xi \in [\partial f(x_0)]^{tr}(v)} \left\langle \xi, u \right\rangle$. Vậy

$$0 \in [\overline{\text{co}}\partial f(x_0)]^{tr}(v).$$

Phần còn lại của định lý được suy ra ngay từ kết quả trên bằng cách cho $v = 1$. $\square$

Từ Định lý 4.2 ta suy ra

Hệ quả 4.3. *Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là hàm khả vi Gâteaux tại x_0 và đạt cực tiểu địa phương tại điểm này. Khi đó*

$$0 = \nabla f(x_0).$$

Chứng minh. Vì nón thứ tự K lồi, đóng và nhọn nên $\text{int}K' \neq \emptyset$. Lấy $v_0 \in \text{int}K'$. Khi đó theo Định lý 4.2 ta có

$$0 = [\nabla f(x_0)]^{tr}(v_0).$$

Cho $v \in \mathbb{R}^m$ tùy ý. Gọi $\lambda > 0$ đủ bé sao cho $v_0 + \lambda v \in K'$. Khi đó

$$0 = [\nabla f(x_0)]^{tr}(v_0 + \lambda v) = [\nabla f(x_0)]^{tr}(v_0) + \lambda[\nabla f(x_0)]^{tr}(v).$$

Suy ra $[\nabla f(x_0)]^{tr}(v) = 0$ và do $v \in \mathbb{R}^m$ tùy ý nên $\nabla f(x_0) = 0$. $\square$

Trường hợp f là hàm vectơ lồi, ta có

Hệ quả 4.4. *Giả sử $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là hàm vectơ lồi (tương ứng với nón K) đạt cực tiểu địa phương tại x_0 và $\partial^{cv} f(x_0)$ là dưới vi phân của f tại x_0. Khi đó*

$$0 \in \partial^{cv} f(x_0).$$

Chứng minh. Theo Định lý 3.3 thì $\partial^{cv} f(x_0)$ là một giả Jacobian lồi, compact của f tại x_0. Áp dụng Định lý 4.2, ta có

$$0 \in [\partial^{cv} f(x_0)]^{tr}(v) \quad \text{với mọi } v \in K'.$$

Mặt khác, theo [7] ta có $[\partial^{cv} f(x_0)]^{tr}(v) = \partial^{ca}(vf)(x_0)$. Do đó với $y \in \mathbb{R}^n$ tùy ý thì

$$\langle v, f(y) - f(x_0)\rangle = (vf)(y) - (vf)(x_0) \geq 0.$$

Do v tùy ý thuộc K' nên $f(y) - f(x_0) \in (K')' = K$, tức là

$$f(y) - f(x_0) \succeq 0.$$

Vậy $0 \in \partial^{cv} f(x_0)$. $\square$

Nhận xét 4.1.

1. Kết luận của Định lý 4.2 cũng đúng cho trường hợp hàm vectơ f đạt cực đại địa phương tại x_0 (tương ứng với nón K). Thật vậy, lúc đó ta có

   $$0 \geq (vf)^-(x_0; u) \geq \inf_{M \in \partial f(x_0)} \langle v, M(u)\rangle = \inf_{M \in \partial f(x_0)} \langle M^{tr}(v), u\rangle = \inf_{\xi \in [\partial f(x_0)]^{tr}(v)} \langle \xi, u\rangle.$$

   Bằng lập luận tương tự như chứng minh của Định lý 4.2 ta cũng có $0 \in [\overline{\text{co}}\partial f(x_0)]^{tr}(v)$ với mọi $v \in K'$.

2. Như là một trường hợp đặc biệt của Hệ quả 4.3, nếu hàm $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ khả vi Gâteaux tại x_0 và đạt cực tiểu địa phương tại điểm này thì $0 = \nabla f(x_0)$.

3. Nếu $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz địa phương thì dưới vi phân Michel-Penot $\partial^{MP} f(x_0)$ là một giả vi phân lồi, compact của f tại x_0. Theo Định lý 4.2, nếu f đạt cực tiểu địa phương tại x_0 thì

   $$0 \in \overline{\text{co}}\partial^{MP} f(x_0) = \partial^{MP} f(x_0).$$

Tương tự như vậy, ta cũng có

$$0 \in \partial^C f(x_0)$$

nếu $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ đạt cực tiểu (hay cực đại) địa phương tại x_0, ở đây $\partial^C f(x_0)$ là dưới vi phân Clarke của hàm f tại x_0.

4. Từ chứng minh của Hệ quả 4.4 ta thấy rằng nếu một hàm vectơ lồi đạt cực tiểu địa phương tại điểm x_0 thì cũng đạt cực tiểu toàn cục tại điểm này.

Ví dụ sau đây cho thấy rằng trong trường hợp tổng quát, ta không thể thay thế $[\overline{\text{co}}\partial f(x_0)]^{tr}(v)$ bằng tập hợp $[\partial f(x_0)]^{tr}(v)$ được.

Ví dụ 4.5. Xét hàm $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cho bởi

$$f(x) = (\sqrt{|x|}, |x|) \quad \text{với } x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó f đạt cực tiểu địa phương tại 0 tương ứng với nón $K = \mathbb{R}^2_+$. Theo Ví dụ 2.3 thì tập hợp

$$\partial f(0) := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} : a \in (-\infty; 1] \cup [1; +\infty) \right\}$$

là một giả Jacobian của f tại 0. Lấy $v = (0, 1) \in K'$ thì ta có $[\partial f(0)]^{tr}(v) = \{-1, 1\}$ và hiển nhiên là $0 \notin [\partial f(0)]^{tr}(v)$.

Định lý sau đây cho ta một điều kiện cần khác để hàm vectơ đạt cực tiểu địa phương trên một tập lồi không rỗng trong $\mathbb{R}^n$.

Định lý 4.6. *Cho C là một tập lồi không rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là hàm vectơ liên tục, khả vi theo hướng tại $x_0 \in C$. Nếu x_0 là điểm cực tiểu địa phương (tương ứng với nón K) của f trên C và $\partial f(x_0)$ là một giả Jacobian của f tại x_0 thì với mọi $v \in K'$, ta có*

$$\sup_{M \in \partial f(x_0)} \big\langle v, M(u) \big\rangle \geq 0 \quad \text{với mọi } u \in T_C(x_0). \tag{6}$$

Đặc biệt, khi $m = 1$ và thứ tự trên $\mathbb{R}$ là thứ tự thông thường thì ta có

$$\sup_{\xi \in \partial f(x_0)} \big\langle \xi, u \big\rangle \geq 0 \quad \text{với mọi } u \in T_C(x_0), \tag{7}$$

trong đó $T_C(x_0) = \overline{\{t(c - x_0) : c \in C, t \geq 0\}}$ là nón tiếp xúc của C tại x_0.

Chứng minh. Cho $v \in K'$. Trước hết ta sẽ chứng minh (6) đúng với mọi $u = c - x_0$ với $c \in C$. Thật vậy, để ý rằng với $c \in C$ và $x_0 \in C$ thì $x_0 + t(c - x_0) \in C$ với $t \in (0; 1)$. Vì f đạt cực tiểu địa phương trên C tại x_0 nên với $t > 0$ đủ bé, ta có $\dfrac{f(x_0 + t(c - x_0)) - f(x_0)}{t} \in K$. Từ đây suy ra

$$\frac{(vf)(x_0 + t(c - x_0)) - (vf)(x_0)}{t} = \left\langle v, \frac{f(x_0 + t(c - x_0)) - f(x_0)}{t} \right\rangle \geq 0$$

với $t > 0$ đủ bé. Điều này dẫn đến

$$(vf)^+(x_0; c - x_0) = \limsup_{t \downarrow 0} \frac{(vf)(x_0 + t(c - x_0)) - (vf)(x_0)}{t} \geq 0.$$

Mặt khác, do $\partial f(x_0)$ là giả Jacobian của f tại x_0 nên

$$\sup_{M \in \partial f(x_0)} \big\langle v, M(c - x_0) \big\rangle \geq (vf)^+(x_0; c - x_0) \geq 0,$$

tức là (6) đúng.

Bây giờ cho $u \in T_C(x_0)$, $u = \lim_{i \to \infty} t_i u_i$ trong đó $c_i \in C$ và $t_i > 0$. Khi đó với mọi $i \in \mathbb{N}$, ta có

$$\sup_{M \in \partial f(x_0)} \big\langle v, M(u_i) \big\rangle \geq 0.$$

Cho $i \to \infty$ ta được

$$\sup_{M \in \partial f(x_0)} \big\langle v, M(u) \big\rangle \geq 0.$$

Trường hợp đặc biệt khi $m = 1$ và thứ tự trên $\mathbb{R}$ là thứ tự thông thường (tức là nón thứ tự $K = \mathbb{R}_+$) thì bằng cách chọn $v = 1$, ta có ngay điều cần chứng minh. $\square$

Nhận xét 4.2. Trong Định lý 4.6, nếu xét $C = \mathbb{R}^m$ thì ta có $T_C(x_0) = \mathbb{R}^m$. Lúc đó với mọi $v \in K'$ và $u \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$\sup_{M \in \partial f(x_0)} \big\langle v, M(u) \big\rangle \geq 0.$$

Điều này dẫn đến $0 \in [\overline{\text{co}} \partial f(x_0)]^{tr}(v)$ như đã chứng minh ở Định lý 4.2. Như vậy có thể thấy rằng Định lý 4.6 là một mở rộng của định lý 4.2.

Tài liệu tham khảo

[1] Dinh The Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture notes in Economics and Mathematical Systems 319,1989.

[2] Vaithilingam Jeyakumar and Dinh The Luc, *Nonsmooth Vector Functions and Continuous Optimization*, Springer, March 4, 2005.

[3] V. Jeyakumar and D.T. Luc, *Approximate Jacobian matrices for nonsmooth continuous maps and C^1-Optimization*, SIAM Journal on Control and Optimization, 36(1998), 1815-1832.

[4] V. Jeyakumar and D.T. Luc, *Nonsmooth calculus, minimality and monotonicity of convexificators*, Journal of Optimization Theory and Applications, 101(1999), 599-621.

[5] V. Jeyakumar, D.T. Luc and P.N. Tinh, *Convex composite non-Lipschitz programming*, Mathematical Programming, Ser. A, 25(2002), pp.177-195.

[6] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.

[7] Phan Nhật Tĩnh, *Hàm vectơ lồi và một số ứng dụng*, Luận văn Tiến sĩ Toán học, Hà Nội, 1999.

[8] V. Jeyakumar and P.N. Tinh, *On squeeze theorems for nonsmooth functions*, Applied Mathematics Report, February, 2001.

PSEUDO-JACOBIAN AND EXTREMUM OF CONTINUOUS VECTOR FUNCTIONS

Phan Nhat Tinh
Faculty of Sciences, University of Hue
Hoang Phuoc Loi
College of Pedagogy, Hue University

SUMMARY

In this paper, a notion of pseudo-Jacobian, one of the generalized derivative of continuous 5 vector functions and some applications will be introduced. The ralation between pseudo-Jacobian and subdifferential of convex vector functions and some examples to illustrate this relation will be established. We also state some necessary conditions for local extremizers of a continuous vector function. These theorem will be a generalization of the necessary conditions for the scalar functions attain local extremum that we have known.