ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU HÀ

MÔĐUN NỘI XẠ CỐT YẾU: CÁC ĐẶC TRƯNG VÀ MỞ RỘNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HUẾ - NĂM 2020

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU HÀ

MÔĐUN NỘI XẠ CỐT YẾU: CÁC ĐẶC TRƯNG VÀ MỞ RỘNG

Ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số: 9460104

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học 1: PGS. TS. TRƯƠNG CÔNG QUỲNH
Người hướng dẫn khoa học 2: GS. TS. LÊ VĂN THUYẾT

HUẾ - NĂM 2020

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi được viết riêng hoặc viết chung với các đồng tác giả. Các kết quả nghiên cứu nêu trong luận án là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

NGUYỄN THỊ THU HÀ

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới hai người Thầy hướng dẫn trực tiếp của tôi là PGS. TS. Trương Công Quỳnh, Trường Đại học Sư phạm-Đại học Đà Nẵng và GS. TS. Lê Văn Thuyết, Trường Đại học Sư phạm-Đại học Huế. Trong suốt quá trình học tập và làm luận án, các thầy đã hết lòng động viên, hướng dẫn và giúp đỡ tôi.

Tôi xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giáo của Khoa Toán và Phòng Sau Đại học của Trường Đại học Sư phạm-Đại học Huế đã giúp đỡ tôi hết sức nhiệt tình và chu đáo.

Tôi xin chân thành cảm ơn Khoa Toán, Viện Công nghệ Gebze, Thổ Nhĩ Kỳ và Khoa Đại số-Logic Toán thuộc Viện nghiên cứu Lobachevsky, Trường Đại học Liên bang Kazan, Liên bang Nga đã tạo điều kiện cho tôi được sang học tập và nghiên cứu trong thời gian từ 1/10/2014 đến 30/12/2014 (tại Gebze) và từ 15/5/2018 đến 15/7/2018 (tại Kazan).

Tôi xin cảm ơn Viện nghiên cứu cao cấp về Toán (VIASM) đã tạo điều kiện cho tôi được đến tham gia các hội thảo, học tập và nghiên cứu.

Tôi chân thành cảm ơn nhóm nghiên cứu của chúng tôi, TS. Phan Dân, TS. Lê Đức Thoang, TS. Bành Đức Dũng, TS. Phan Thế Hải, TS. Phan Hồng Tín và các anh chị em nghiên cứu sinh và học viên khác đã cùng tôi trao đổi, giúp tôi giải quyết vấn đề, chia sẻ cùng tôi mọi khó khăn cả trong quá trình nghiên cứu và ngoài cuộc sống. Tôi cảm thấy mình thật may mắn vì được tham gia vào một nhóm nghiên cứu đoàn kết và ấm áp như vậy.

Tôi muốn tỏ lòng biết ơn vô hạn tới gia đình tôi, chồng và con gái tôi, bố mẹ, anh chị em tôi. Chính họ đã luôn bên cạnh tôi từ lúc tôi bắt đầu cho đến bây giờ, đây chính là nguồn động viên tinh thần tuyệt vời đã giúp tôi vượt qua những lúc khó khăn tưởng chừng như không thể nào tiếp tục được.

NGUYỄN THỊ THU HÀ

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

KÝ HIỆU	NGHĨA CỦA KÝ HIỆU
[1]	Tài liệu số 1 ở mục "Tài liệu tham khảo"
$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{Z}$	Vành các số nguyên
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	Trường các số hữu tỷ, số thực (tương ứng)
$\lvert X\rvert$	Bản số của tập hợp X
$E(M)$	Bao nội xạ của môđun M
$End_R(M)$	Vành các tự đồng cấu của R-môđun M
$Im(f),\ Ker(f)$	Ảnh, hạt nhân của đồng cấu f (tương ứng)
$\mathbb{M}_n(R)$	Vành ma trận vuông cấp n với các hệ tử trên vành R
M_R $({}_RM)$	M là một R-môđun phải, trái (tương ứng)
$M^{(I)}$	$\bigoplus_{i\in I} M$ (tổng trực tiếp của $\lvert I\rvert$ bản sao của môđun M)
M^I	$\prod_{i\in I} M$ (tích trực tiếp của $\lvert I\rvert$ bản sao của môđun M)
$N \leq M$	N là môđun con của môđun M
$N < M$	N là môđun con thực sự của môđun M
$N \leq^e M$	N là môđun con cốt yếu (hay lớn) của môđun M
$N \ll M$	N là môđun con đối cốt yếu (hay bé) của môđun M
$N \leq^{\oplus} M$	N là hạng tử trực tiếp của môđun M
$N \cong M$	N đẳng cấu với môđun M
$N \oplus M$	Tổng trực tiếp của môđun N và môđun M
$r_R(X),\ l_R(X)$	Linh hóa tử phải và trái của tập hợp X trong R
$R[x]$	Vành đa thức ẩn x lấy hệ tử trên vành R
$Rad(M),\ J(R)$	Căn của môđun M, căn của vành R (tương ứng)
$Soc(M)$	Đế của môđun M
S_r, S_l	$Soc(R_R), Soc({}_RR)$
$Z(M)$	Môđun con suy biến của môđun M

DANH MỤC CÁC THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	TIẾNG ANH
bao nội xạ	injective hull
bất biến hoàn toàn	fully invariant
bất biến đẳng cấu	automorphism-invariant
các lũy đẳng có thể nâng được modulo I	idempotents modulo I can be lifted
chính quy	regular
đều	uniform
đế	socle
địa phương	local
điều kiện dây chuyền giảm	Descending Chain Condition
điều kiện dây chuyền tăng	Ascending Chain Condition
đối nửa đơn	co-semisimple
đối bất biến đẳng cấu	automorphism-coinvariant
đơn	simple
tựa nội xạ	self (quasi)-injective
tựa nội xạ cốt yếu	essentially self (quasi)-injective
hạng tử trực tiếp	direct summand
hoàn chỉnh	perfect
iđêan	ideal
không phân tích được	indecomposable
liên tục	continuous
linh hóa tử	annihilator
lũy đẳng	idempotent
lũy linh	nilpotent
nguyên thủy	primitive
nguyên tố	prime

THUẬT NGỮ	**TIẾNG ANH**
nội xạ đơn	simple injective
nửa hoàn chỉnh	semiperfect
M-sinh	M-generated
môđun cốt yếu (lớn)	(large) essential module
môđun đối cốt yếu (bé)	(small) superfluous module
môđun mở rộng	extending module
môđun tựa nội xạ	self (quasi)-injective module
môđun tự sinh	self-generator module
mở rộng cốt yếu	essential extension
nội xạ	injective
nội xạ cốt yếu	essentially injective
nội xạ tương hỗ	(relative) mutually injective
N-nội xạ	N-injective
N-nội xạ cốt yếu	essentially N-injective
N-xạ ảnh	N-projective
N-xạ ảnh bé	small N-projective
nửa Artin	semi Artinian
nửa đơn	semisimple
phần bù giao	complement
rời rạc	discrete
suy biến	singular
thể (vành chia)	skew field (division ring)
tựa liên tục	quasi-continuous
trực giao	orthogonal
vành Artin nửa đơn	semisimple Artinian ring
xạ ảnh	projective
xiclic	cyclic

Mục lục

MỞ ĐẦU

Từ một tập hợp nào đó khác rỗng, người ta đưa vào một số phép toán cùng các quy tắc đã được xác định để tạo nên các cấu trúc đại số. Cùng với nhóm và trường, vành là một trong ba cấu trúc cơ bản nhất của đại số và có nhiều ứng dụng rộng rãi. Lý thuyết vành đã xuất hiện khoảng 120 năm trước và ngày càng phát triển mạnh mẽ. Theo một cách cổ điển, người ta sẽ xét tính chất một vành bằng cách đi tìm hiểu các tính chất của cấu trúc con trên vành như iđêan, vành con, đồng cấu.... Sau này người ta chứng minh được rằng tính chất của các R-môđun trên vành R cũng ảnh hưởng đến tính chất của chính vành đó. Ví dụ như khi mọi R-môđun phải (trái) là nội xạ (xạ ảnh) thì vành đó là vành nửa đơn. Vì thế, trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu cấu trúc của vành thông qua việc xem xét các môđun trên chúng.

Trong lý thuyết môđun thì hai lớp môđun nội xạ và xạ ảnh đóng vai trò chủ đạo. Ý tưởng về môđun nội xạ xuất hiện đầu tiên vào năm 1940 do Baer đưa ra cho nhóm Aben, nhưng thuật ngữ "nội xạ" được đưa ra bởi Eckman-Schopf năm 1953. Sau này khái niệm môđun nội xạ được mở rộng hơn qua định nghĩa: môđun M được gọi là N-*nội xạ* nếu với mọi môđun con A của N thì mọi đồng cấu $f : A \to M$ đều mở rộng được thành đồng cấu $g : N \to M$. Vì mỗi vành có đơn vị là một môđun phải và trái trên chính nó và mỗi iđêan phải (tương ứng, trái) của R là một R-môđun phải (tương ứng, trái) nên Baer cũng đồng thời đưa ra một tiêu chuẩn để kiểm tra tính nội xạ của một môđun M. "Tiêu chuẩn Baer" nổi tiếng đó được phát biểu như sau: Môđun N_R là nội xạ nếu với mọi iđêan phải I của R, mọi đồng cấu $f : I \to N$ luôn tồn tại đồng cấu $\bar{f} : R_R \to N$ sao cho $\bar{f}$ là mở rộng của f.

Trong quá trình nghiên cứu lớp môđun nội xạ, các nhà khoa học bắt đầu chú ý đến việc mở rộng lớp môđun này, mục đích là bổ sung một số tính chất vào một môđun nội xạ để có thể đặc trưng vành được dễ dàng hơn. Sau khi tiêu chuẩn Baer ra đời, xuất hiện hai hướng nghiên cứu chính về sự mở rộng của môđun nội xạ. Đó là nghiên cứu sự mở rộng môđun nội xạ từ Tiêu chuẩn Baer và từ định nghĩa. Trong luận án này, vì mục đích riêng, nên chủ yếu chúng tôi đề cập đến sự mở rộng của môđun nội xạ từ định nghĩa.

Mở rộng của môđun nội xạ là môđun tựa nội xạ được các tác giả Johnson và Wong đưa ra năm 1961 trong [24]. Một R-môđun phải M được gọi là *tựa nội xạ* (hay *tự nội xạ*) nếu M là M-nội xạ. Môđun tựa nội xạ là một mở rộng thực sự của môđun nội xạ. Cũng trong bài báo này, các tác giả trên đã chứng minh được rằng một môđun là tựa nội xạ nếu nó bất biến hoàn toàn qua mọi tự đồng cấu của bao nội xạ của nó. Kết quả này đưa ra một xu thế mới khi nghiên cứu về lý thuyết môđun, đó là nghiên cứu các môđun bất biến (dưới các tự đồng cấu lũy đẳng của bao nội xạ, dưới các tự đẳng cấu của bao nội xạ, ...). Đã có rất nhiều tác giả nghiên cứu về lớp môđun tựa nội xạ và các mở rộng của nó và thu được nhiều kết quả, có thể kể đến là Dinh-Holston-Huynh ([14], 2012), Lee-Zhou ([32], 2013), Er-Singh-Srivastava ([15], 2013), Singh- Srivastava ([44], 2014), Guil Asensio-Tutuncu-Srivastava ([20], 2015), Quynh-Kosan ([41], 2015), Thuyet-Dan-Quynh ([47], 2016), ...

Tiếp tục theo hướng mở rộng này, một mở rộng khác của môđun nội xạ, đó là môđun nội xạ cốt yếu đã được đưa ra trong sách chuyên khảo của Dung-Huynh-Smith-Wisbauer năm 1994 (xem [11]). Một R-môđun phải M được gọi là N-*nội xạ cốt yếu* nếu mọi đồng cấu với hạt nhân cốt yếu từ một môđun con của N vào M đều mở rộng được tới N, và một môđun M là *tựa nội xạ cốt yếu* nếu nó là M-nội xạ cốt yếu. Rõ ràng môđun nội xạ cốt yếu là mở rộng thực sự của môđun nội xạ, và môđun tựa nội xạ cốt yếu cũng là một mở rộng thực sự của môđun tựa nội xạ.

Các kết quả về môđun nội xạ cốt yếu chủ yếu được đưa ra trong Dung-Huynh-Smith-Wisbauer ([11], 1994) và Santa-Clara ([43], 1998). Bài báo của Santa-Clara đã giải quyết được các vấn đề: khi nào thì tổng trực tiếp của hai môđun mở rộng (tổng trực tiếp của một môđun mở rộng và một môđun nội xạ, tổng trực tiếp của một môđun có tính chất trao đổi hữu hạn và một môđun nửa đơn) là một môđun mở rộng. Ngoài ra, tác giả cũng đã trả lời câu hỏi khi nào thì tổng trực tiếp của một môđun mở rộng đều và một môđun nửa đơn là môđun mở rộng đều. Song song đó, các tính chất tương tự của môđun nội xạ cốt yếu cũng đã được Santa-Clara nghiên cứu.

Luận án này tiếp tục nghiên cứu các tính chất của môđun nội xạ cốt yếu để từ đó tìm ra mối liên hệ với các lớp môđun khác, đồng thời đặc trưng trên các vành quen thuộc. Vì vậy, chúng tôi chọn tên đề tài là "**Môđun nội xạ cốt yếu: các đặc trưng và mở rộng**".

Luận án được chúng tôi trình bày thành 3 chương.

Chương 1 nhắc lại các khái niệm cơ bản và một số kết quả đã biết với mục đích sử dụng cho các chương sau.

Chương 2 chủ yếu nghiên cứu các tính chất của môđun nội xạ cốt yếu và tựa nội xạ cốt yếu, đồng thời đưa ra các kết quả liên quan giữa lớp môđun nội xạ cốt yếu và lớp môđun bất biến đẳng cấu.

Như đã nói ở trên, năm 1994, các tác giả Dung-Huynh-Smith-Wisbauer ([11]) đã đưa ra khái niệm môđun nội xạ cốt yếu, đồng thời giới thiệu một số tính chất của lớp môđun này. Tiếp đó, năm 1998, Santa-Clara cũng đưa ra được thêm các tính chất mới của lớp môđun nội xạ cốt yếu. Trong luận án này, ngoài việc đưa ra thêm được một số tính chất mới của môđun nội xạ cốt yếu, chúng tôi còn đặc trưng được một số vành quen thuộc thông qua lớp môđun này như vành tự đồng cấu, V-vành, vành Noether và vành nửa Artin (được trình bày trong Chương 3).

Những kết quả mới của môđun nội xạ cốt yếu mà chúng tôi thu được, gồm các đặc trưng của môđun N-nội xạ cốt yếu (Định lý 2.2.2, Định lý 2.2.5, Định lý 2.2.8 và Định lý 2.2.12). Trong [24] các tác giả chứng minh được rằng với hai R-môđun phải M và N, thì M là N-nội xạ khi và chỉ khi $f(N) \leq M$ với mọi đồng cấu $f : E(N) \to E(M)$. Chúng tôi chứng minh được rằng điều đó vẫn đúng với môđun M là N-nội xạ cốt yếu nếu bổ sung thêm điều kiện $Ker(f) \leq^e E(N)$. Cụ thể:

Định lý 2.2.2. *Các điều kiện sau là tương đương đối với các môđun M và N:*

(1) *M là N-nội xạ cốt yếu.*

(2) *Với mỗi R-đồng cấu $\alpha : E(N) \to E(M)$ từ bao nội xạ của N vào bao nội xạ của M với hạt nhân cốt yếu thì $\alpha(N) \leq M$.*

(3) *$\alpha(N) \leq M$ với mọi α nằm trong $J[E(N), E(M)]$ của $Hom(E(N), E(M))$.*

Sau đó khi cho $N = M$ chúng tôi thu lại ngay được Hệ quả 2.2.3, chính là tính bất biến của môđun tựa nội xạ cốt yếu.

Sau khi Jonhson và Wong ([24]) chứng minh được rằng lớp các môđun bất biến dưới các tự đồng cấu của bao nội xạ chính là lớp môđun tựa nội xạ thì vấn đề nghiên cứu những môđun bất biến dưới các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó được chú ý nhiều hơn. Tiếp tục theo hướng này, Dickson và Fuller ([13]) xem xét các môđun bất biến dưới các tập con khác của vành các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó, cụ thể là tập con của vành các tự đẳng cấu. Từ những kết quả ban đầu này, người ta nghĩ đến việc mở rộng môđun nội xạ theo hai hướng, hướng thứ nhất là mở rộng bằng cách thêm hoặc bớt các điều kiện trong định nghĩa gốc của môđun nội xạ (như mở rộng thành môđun nội xạ cốt yếu mà chúng tôi trình bày phía trên), và hướng thứ hai là mở rộng bằng cách nghiên cứu lớp môđun bất biến dưới các tập con khác (chẳng hạn các đẳng cấu) của vành các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó.

Năm 2013, các tác giả Lee-Zhou đã đưa ra định nghĩa môđun bất biến đẳng cấu trong [32], theo đó, môđun M được gọi là *bất biến đẳng cấu* nếu nó bất biến dưới các tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó. Định lý 2.2.9 của chúng tôi đã chỉ ra được mối quan hệ giữa môđun tựa nội xạ cốt yếu và môđun bất biến đẳng cấu, kết quả này là tiền đề để phát triển mục cuối chương 3. Định lý được phát biểu như sau:

Định lý 2.2.9. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải M và bao nội xạ* $u : M \to E(M)$*:*

(1) *M là môđun bất biến đẳng cấu.*

(2) *M là môđun tựa nội xạ cốt yếu và* $End(M)/\Delta(M)$ *ổn định với phép nhân bên trái bởi phần tử khả nghịch của* $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$.

Trong trường hợp này, M thỏa mãn tính chất trao đổi.

Chúng tôi tiếp tục chứng minh được các tính chất của tổng trực tiếp, tích trực tiếp của các môđun nội xạ cốt yếu. Định lý 2.2.12 là một phiên bản của một kết quả của các tác giả Cartan-Eilenberg, Faith-Walker, Bass, Matlis, Papp và Kushan dành cho môđun nội xạ cốt yếu. Nếu như các tác giả trên chứng minh được rằng nếu xét trên vành Noether phải thì mọi tổng trực tiếp của các môđun nội xạ là nội xạ, thì định lý sau của chúng tôi dành cho môđun nội xạ cốt yếu.

Định lý 2.2.12. *Các điều kiện sau đây tương đương đối với một vành R:*

(1) *R thỏa mãn điều kiện ACC trên các iđêan phải cốt yếu của R (nghĩa là,* $R/Soc(R_R)$ *là vành Noether phải).*

(2) *Mỗi tổng trực tiếp của các R-môđun phải nội xạ cốt yếu là nội xạ cốt yếu.*

(3) *Nếu* $K_0, K_1, \ldots, K_n \ldots$ *là các môđun phải đơn, thì* $\oplus_{\mathbb{N}} E(K_i)$ *là nội xạ cốt yếu.*

(4) $E^{(\mathbb{N})}$ *là nội xạ cốt yếu với mọi môđun nội xạ cốt yếu* E_R.

Định lý 2.2.14 sau đây cho chúng tôi kết quả: mọi R-môđun phải là nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi mọi R-môđun suy biến là môđun nửa đơn, là một mở rộng của Định lý Osofsky.

Định lý 2.2.14. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành R:*

(1) *Mọi R-môđun phải là nội xạ cốt yếu.*

(2) *Mọi R-môđun phải xiclic là nội xạ cốt yếu.*

(3) *Mọi R-môđun suy biến là môđun nửa đơn.*

Tính chất trao đổi và tính chất trao đổi hữu hạn của môđun được đưa ra năm 1964 bởi các tác giả Crawley-Jónsson trong [10]. Hai câu hỏi được đưa ra là

- *Những môđun như thế nào sẽ thỏa mãn tính chất trao đổi?*
- *Những môđun nào mà khi thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn cũng sẽ thỏa mãn tính chất trao đổi?*

Các tác giả đã đưa ra các câu trả lời cho câu hỏi thứ nhất trong các trường hợp là môđun nội xạ (trong [51]), là môđun tựa nội xạ (trong [17]), là môđun liên tục (trong [34]). Câu trả lời cho câu hỏi thứ hai được Mohamed-Muller đưa ra đối với môđun tựa liên tục trong [35]. Chúng tôi cũng đã trả lời cả hai câu hỏi này trong trường hợp M là môđun tựa nội xạ cốt yếu trong Định lý 2.2.9 và Định lý 2.2.11.

Định lý 2.2.11. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu M:*

(1) M *là tựa liên tục.*

(2) $End(M)/\Delta(M)$ *ổn định với phép nhân bên trái bởi lũy đẳng của* $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$.

Lúc này, nếu M thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn thì M cũng thỏa mãn tính chất trao đổi.

Mối liên hệ giữa tính chất của một vành, môđun nội xạ và môđun xạ ảnh trong rất nhiều trường hợp đã xảy ra rất chặt chẽ. Chẳng hạn như một vành R là QF (tựa-Frobenius) khi và chỉ khi mọi R-môđun phải (trái) nội xạ là xạ ảnh, khi và chỉ khi mọi R-môđun phải (trái) xạ ảnh là nội xạ. Vì vậy, quan tâm xét đến các khái niệm đối ngẫu cũng rất cần thiết và hữu ích. Trong Chương 3, chúng tôi nghiên cứu một mở rộng của môđun xạ ảnh là môđun xạ ảnh bé, tức là môđun đối ngẫu của môđun nội xạ cốt yếu. Song song đó chúng tôi cũng xem xét lớp môđun đối bất biến đẳng cấu và tìm ra mối liên hệ giữa môđun tựa xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu trong Định lý 3.1.11 như sau:

Định lý 3.1.11. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải M với một phủ xạ ảnh $p : X \to M$:*

(1) *M là môđun đối bất biến đẳng cấu.*

(2) *M là môđun tựa xạ ảnh bé và $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$.*

Trong trường hợp này, M thỏa mãn tính chất trao đổi.

Các kết quả về tính chất trao đổi và tính chất trao đổi hữu hạn cũng được chúng tôi giải quyết với môđun tựa xạ ảnh bé trong Định lý 3.1.11 và Định lý 3.1.12. Hầu hết các kết quả của môđun xạ ảnh bé là đối ngẫu với các kết quả của môđun nội xạ cốt yếu (Định lý 3.1.7, Hệ quả 3.1.8 và Định lý 3.1.10). Phần sau của chương chúng tôi đặc trưng một số vành quen thuộc thông qua môđun nội xạ cốt yếu và môđun xạ ảnh bé. Chúng tôi chứng minh được rằng nếu vành tự đồng cấu $End(M)$ của một R-môđun phải tự sinh M là vành tựa nội xạ cốt yếu thì M cũng là R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu (Định lý 3.2.1).

Khái niệm V-vành được Faith giới thiệu năm 1967 ([16]) với định nghĩa như sau, vành R được gọi là *V-vành phải* nếu mọi R-môđun phải đơn là nội xạ, hoặc tương đương, mọi iđêan phải là giao của các iđêan phải cực đại. Định lý 3.2.3 của chúng tôi đã chứng minh được rằng nếu xét R là một vành bất kỳ, thì $R/Soc(R)$ là V-vành phải khi và chỉ khi mọi R-môđun phải là xạ ảnh bé, khi và chỉ khi mọi R-môđun phải đơn là nội xạ cốt yếu.

Định lý 3.2.3. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành R:*

(1) $R/Soc(R_R)$ *là* V*-vành phải.*

(2) *Mọi* R*-môđun phải là xạ ảnh bé.*

(3) *Mọi* R*-môđun phải hữu hạn sinh là xạ ảnh bé.*

(4) *Mọi* R*-môđun phải xiclic là xạ ảnh bé.*

(5) *Mọi* R*-môđun phải nửa đơn là xạ ảnh bé.*

(6) *Mọi* R*-môđun phải đơn là xạ ảnh bé.*

(7) *Mọi* R*-môđun phải đơn là nội xạ cốt yếu.*

Phần cuối cùng của Chương 3 dành để giới thiệu lớp vành mà mọi môđun xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu. Chúng tôi nghiên cứu lớp vành này do mối liên hệ giữa môđun xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu trong Định lý 3.1.11: trên một vành hoàn chỉnh R, môđun M là môđun đối bất biến đẳng cấu khi và chỉ khi M là môđun tựa xạ ảnh bé và $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$, với X là phủ xạ ảnh của M.

Năm 1969, trong [23], các tác giả Jain-Mohamed-Singh đã đưa ra khái niệm q*-vành phải*, là vành mà mọi iđêan phải trên nó là tựa nội xạ. Việc nghiên cứu vành mà mọi môđun phải xiclic trên nó là tựa xạ ảnh được Koehler đưa ra trong [27] và gọi vành đó là q^**-vành phải*. Chúng ta nhắc lại rằng một môđun M là tựa nội xạ nếu nó bất biến dưới các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó, hay nói cách khác, mỗi đồng cấu từ một môđun con của M vào M đều mở rộng được đến một tự đồng cấu của M. Từ tính chất này của môđun tựa nội xạ, và từ định nghĩa môđun bất biến đẳng cấu mà Lee-Zhou đưa ra trong [32], các tác giả Singh-Srivastava đã tiếp tục đưa ra lớp vành mà mọi iđêan phải là bất biến đẳng cấu, gọi là a*-vành phải* ([45]). Ba lớp vành q-vành, q^*-vành và a-vành được các tác giả đặc trưng vành, đưa ra cấu trúc và thu được nhiều tính chất thú vị. Rõ ràng, mọi vành q-vành là a-vành, và các tính chất của q^*-vành là đối ngẫu với các tính chất của q-vành.

Tiếp tục hướng nghiên cứu này, sau khi giới thiệu khái niệm môđun đối bất biến đẳng cấu trong [44], các tác giả Singh-Srivastava đã để ngỏ một vấn đề ở cuối bài báo: Đặc trưng những vành mà mọi môđun phải xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu? Phần này trong Chương 3 của chúng tôi đã giải quyết gần như trọn vẹn vấn đề trên. Trong [27], tác giả đưa ra cấu trúc của q^*-vành như sau: cho R là vành nửa hoàn chỉnh, khi đó R là q^*-vành phải nếu mỗi iđêan phải trong căn $J(R)$ cũng là iđêan. Chúng tôi cũng chỉ ra được cấu trúc của a^*-vành trong Định lý 3.3.4, cho R là vành nửa hoàn chỉnh, khi đó R là a^*-vành phải nếu mỗi iđêan phải trong căn $J(R)$ là một T-môđun trái, với T là một vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch của R. Định lý được phát biểu như sau:

Định lý 3.3.4. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành nửa hoàn chỉnh R:*

(1) *R là a^*-vành phải.*

(2) *Mỗi iđêan phải trong $J(R)$ là một T-môđun trái, trong đó T là một vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch của R.*

Sau đó, chúng tôi chứng minh được một kết quả về sự phân tích của a^*-vành trong Định lý 3.3.6. Cụ thể:

Định lý 3.3.6. *Cho R là a^*-vành phải bất biến đẳng cấu phải nửa hoàn chỉnh, khi đó R phân tích được thành $R = S \oplus T$, trong đó*

(1) *S là vành Artin nửa đơn.*

(2) *$T = e_1R \oplus e_2R \oplus \cdots \oplus e_nR$, trong đó $e_1, e_2, \ldots, e_n$ là các lũy đẳng địa phương trực giao, và $e_iR \not\cong e_jR$ với mọi $i \neq j$.*

Chúng tôi đưa ra được ví dụ khẳng định rằng trong trường hợp tổng quát thì a^*-vành phải và a^*-vành trái là khác nhau (Ví dụ 3.3.12), song song đó chúng tôi cũng chứng minh được Định lý 3.3.14 nói rằng xét vành R là vành nửa hoàn chỉnh và mọi iđêan trái chính bé là linh hóa tử trái, lúc này nếu R là a^*-vành phải thì R cũng là a^*-vành trái.

Các kết quả về mối quan hệ của các lớp vành cũng được chúng tôi chú trọng nghiên cứu, như quan hệ giữa vành nguyên tố a^*-vành nửa hoàn chỉnh với vành Artin đơn và vành địa phương (Định lý 3.3.7), quan hệ giữa vành Arin nửa đơn và vành nửa hoàn chỉnh (Định lý 3.3.9), quan hệ giữa a-vành và a^*-vành (Hệ quả 3.3.11, Định lý 3.3.16).

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong toàn bộ luận án này, nếu không chú thích gì thêm, vành R đã cho luôn được giả thiết là vành kết hợp, có phần tử đơn vị khác phần tử không, và mọi R-môđun được xét là môđun unita phải hoặc trái.

1.1 Một số ký hiệu và khái niệm cơ bản

Trong mục này chúng tôi giới thiệu lại những ký hiệu, khái niệm cơ bản được sử dụng trong suốt luận án. Các khái niệm cơ bản, kết quả trong phần này chủ yếu được trích trong các tài liệu của Birkenmeier-Park-Rizvi ([6]), Anderson-Fuller ([5]), Dung-Huynh-Smith-Wisbauer ([11]), Lam ([33]), Nicholson-Yousif ([37]) và Wisbauer ([52]).

Với vành R đã cho, để chỉ M là một R-môđun phải (trái) ta viết M_R ($_RM$, tương ứng). Trong một ngữ cảnh cụ thể của luận án, khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, để ngắn gọn chúng tôi sẽ viết môđun M thay vì M_R. Chúng tôi dùng các ký hiệu $A \leq M$ ($A < M$) để chỉ A là môđun con (tương ứng, môđun con thực sự) của M. Nếu A là một hạng tử trực tiếp của M thì ta ký hiệu là $A \leq^{\oplus} M$. Chúng tôi dùng ký hiệu $\mathbb{M}_n(R)$ để chỉ vành các ma trận vuông cấp n lấy hệ tử trên vành R. Cho I là một tập hợp với bản số $card(I) = \alpha$ và M là môđun nào đó, chúng tôi ký hiệu tổng trực tiếp α bản sao của M là $M^{(I)}$ hoặc $M^{(\alpha)}$, tích trực tiếp α bản sao của M là M^I hoặc M^α. Cho M và N là các R-môđun phải bất kỳ, một đồng cấu từ M vào N được hiểu là đồng cấu từ R-môđun phải M vào R-môđun phải N. Ta dùng ký hiệu $Hom_R(M, N)$ để chỉ tập các R-đồng cấu môđun từ M vào N, và $End_R(M)$ để chỉ tập các tự đồng cấu của R-môđun phải M.

Cho M là một R-môđun phải và tập $\emptyset \neq X \subset M$. *Linh hóa tử phải của X trong R* được ký hiệu là $r_R(X)$ và được xác định bằng biểu thức

$$r_R(X) = \{r \in R \mid xr = 0 \quad \text{với mọi} \quad x \in X\}.$$

Khi không sợ nhầm lẫn về vành R ta viết gọn là $r(X)$ thay vì $r_R(X)$. Ta có $r_R(X)$ là một iđêan phải của vành R, và nếu X là một môđun con của M thì $r(X)$ là một iđêan (phải và trái) của R. *Linh hóa tử trái của X trong R* được định nghĩa hoàn toàn tương tự và được ký hiệu là $l_R(X)$.

Cho M là một R-môđun phải và một phần tử $m_0 \in M$, khi đó $m_0R = \{m_0r | r \in R\}$ là một môđun con của M và được gọi là *môđun con xiclic sinh bởi phần tử m_0*. Một môđun M được gọi là *đơn* nếu $M \neq 0$ và chỉ có đúng hai môđun con là 0 và M. Môđun M là *nửa đơn* nếu M phân tích được thành tổng trực tiếp của các môđun con đơn. Ta quy ước môđun 0 là một môđun nửa đơn. Khi M là môđun đơn thì ta luôn viết được $M = mR$ với mọi $0 \neq m \in M$.

Chúng tôi muốn giới thiệu một đặc trưng chính của môđun nửa đơn trong bổ đề sau.

Bổ đề 1.1.1 ([11, 7.14], [52, 20.2])**.** *Cho M là một R-môđun phải. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(1) *M là môđun nửa đơn.*

(2) *Mọi R-môđun N là M-nội xạ.*

(3) *Mỗi môđun con của M là hạng tử trực tiếp của M.*

Môđun con A của môđun M được gọi là *cốt yếu* (hay *lớn*) trong M nếu với mỗi môđun con khác không B của M ta đều có $A \cap B \neq 0$. Khi đó ta còn gọi M là một *mở rộng cốt yếu* của A và ký hiệu là $A \leq^e M$. Một đơn cấu $f : M \to N$ được gọi là *đơn cấu cốt yếu* (hay *nhúng cốt yếu*) nếu ảnh của f cốt yếu trong môđun N. Đối ngẫu với khái niệm cốt yếu, môđun con A của môđun M được gọi là *đối cốt yếu* (hay *bé*) trong M nếu với mỗi môđun con $B \neq M$ của M ta đều có $A + B \neq M$, được ký hiệu là $A \ll M$. Một toàn cấu $f : M \to N$ được gọi là *toàn cấu đối cốt yếu* (hay *toàn cấu bé*) nếu $Ker(f) \ll M$. Một môđun $M \neq 0$ được gọi là *môđun đều* nếu mọi môđun con khác không của M là cốt yếu trong M.

Mệnh đề sau đây là một số tính chất cơ bản của môđun con cốt yếu mà chúng tôi sẽ sử dụng trong các phần sau.

Mệnh đề 1.1.2 ([11, 1.5]). *Cho K và N là các môđun con của môđun M. Khi đó:*

(1) *Nếu $K \leq N$ thì $K \leq^e M$ khi và chỉ khi $K \leq^e N$ và $N \leq^e M$.*

(2) *Nếu $N \leq^e M$ thì $N \cap K \leq^e K$.*

(3) *Nếu $N, K \leq^e M$ thì $N \cap K \leq^e M$.*

(4) *Nếu $K \leq N$ và $N/K \leq^e M/K$ thì $N \leq^e M$.*

(5) *Nếu $M = \oplus_{i \in I} M_i$ và $N_i \leq^e M_i$ với mọi $i \in I$ thì $\oplus_{i \in I} N_i \leq^e M$.*

Môđun con K của M được gọi là *đóng trong M* nếu K không có mở rộng cốt yếu thực sự, nghĩa là, nếu L là một môđun con của M sao cho $K \leq^e L$ thì $K = L$. Cho N là một môđun con của môđun M, một môđun con K của M được gọi là *phần bù của N trong M* nếu K là môđun con cực đại của M thỏa mãn $L \cap N = 0$, môđun con K của M được gọi là *phần bù trong M* nếu tồn tại một môđun con N của M sao cho K là phần bù của N trong M. Tính chất thường dùng của phần bù được thể hiện trong bổ đề sau.

Bổ đề 1.1.3 ([11, 1.10]). *Cho L và N là các môđun con của môđun M thỏa mãn $L \cap N = 0$. Khi đó:*

(1) *tồn tại một phần bù K của N sao cho $L \leq K$;*

(2) $K \oplus N \leq^e M$*;*

(3) *K đóng trong M.*

Đế phải của một R-môđun phải M được ký hiệu là $Soc(M_R)$, là tổng của các môđun con đơn của M, hay tương đương, là giao của tất cả các môđun con cốt yếu của M. Nếu môđun M không chứa một môđun con đơn nào thì $Soc(M_R) = 0$. Căn Jacobson của một R-môđun phải M được ký hiệu là $Rad(M_R)$, là giao của tất cả các môđun con tối đại của M, hay tương đương, là tổng tất cả các môđun con bé của môđun M. Nếu M không chứa môđun con tối đại nào thì $Rad(M_R) = M_R$. Đặc biệt, chúng ta có kết quả $Rad(R_R) = Rad(_RR) = J(R)$, nên có thể ký hiệu $J(R)$ để chỉ căn Jacobson của vành R và cũng là căn của R_R mà không sợ nhầm lẫn, trong đó $J(R)$ là giao của các iđêan phải cực đại của R.

Cho M là một R-môđun phải. Môđun con suy biến của M được ký hiệu là $Z(M)$ và xác định như sau:

$$Z(M) = \{x \in M \mid r(x) \leq^e R_R\}.$$

Nếu $Z(M) = M$ thì M được gọi là *môđun suy biến*, còn nếu $Z(M) = 0$ thì M là *môđun không suy biến*. Rõ ràng $Z(M)$ là môđun con suy biến lớn nhất của M. Vành R được gọi là *vành không suy biến phải* nếu $Z(R_R) = 0$. Một kết quả nổi tiếng về môđun suy biến mà chúng ta thường dùng đó là mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.1.4 ([19, Proposition 3.26])**.** *Môđun M là suy biến khi và chỉ khi M đẳng cấu với A/B với môđun A nào đó và B là môđun con cốt yếu của A.*

Cho một R-môđun phải M và gọi $\mathfrak{L}$ là dãy các môđun con nào đó của M. Ta nói $\mathfrak{L}$ thỏa mãn *điều kiện dây chuyền tăng*, viết tắt là ACC, nếu mọi dãy tăng

$$A_1 \leq A_2 \leq \cdots \leq A_n \leq \cdots$$

các môđun thuộc $\mathfrak{L}$ đều dừng, nghĩa là tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $A_n = A_{n+i}$ với mọi $i \in \mathbb{N}$. Tương tự, $\mathfrak{L}$ được nói là thỏa mãn *điều kiện dây chuyền giảm*, viết tắt là DCC, nếu mọi dãy giảm

$$B_1 \geq B_2 \geq \cdots \geq B_n \geq \cdots$$

các môđun thuộc $\mathfrak{L}$ đều dừng, nghĩa là tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $B_n = B_{n+i}$ với mọi $i \in \mathbb{N}$.

Một môđun M được gọi là *Noether* nếu nó thỏa mãn ACC trên tập tất cả các môđun con của nó, hay tương đương, nếu mọi môđun con của M là hữu hạn sinh. Một môđun M là *Artin* nếu nó thỏa mãn DCC trên tập tất cả các môđun con của nó, hay tương đương, nếu mọi môđun thương của M là hữu hạn đối sinh.

1.2 Môđun nội xạ, xạ ảnh và một số mở rộng

Cho M, N là các R-môđun phải, A là một môđun con của N và các đồng cấu $h : A \to M, \bar{h} : N \to M$. Khi đó ta nói đồng cấu *h mở rộng được đến đồng cấu $\bar{h}$* (hoặc nói đồng cấu $\bar{h}$ là *một mở rộng của đồng cấu h*) nếu $\bar{h}(x) = h(x)$ với mọi $x \in A$.

Chúng tôi sẽ trình bày trong mục này các kiến thức về lớp các môđun đóng vai trò quan trọng và có nhiều ứng dụng trong lý thuyết vành kết hợp, đó là lớp các môđun nội xạ và môđun xạ ảnh.

Cho M và N là các R-môđun phải. Môđun M được gọi là *N-nội xạ* nếu mọi đồng cấu $f : A \to M$, với A là một môđun con của N, đều mở rộng được đến một đồng cấu $g : N \to M$. Nếu môđun M là M-nội xạ thì ta gọi M là môđun *tựa nội xạ* hoặc *tự nội xạ*, và nếu môđun M là N-nội xạ với mọi R-môđun phải N thì M được gọi là môđun *nội xạ*. Theo định nghĩa này, muốn chứng minh một môđun M là nội xạ ta sẽ phải kiểm tra xem nó có là N-nội xạ với mọi môđun N hay không? Tuy nhiên Baer đã đưa ra một cách khác để kiểm tra tính nội xạ, thường gọi là "Tiêu chuẩn Baer" và được phát biểu như sau.

Định lý 1.2.1 ([5, 18.3]). *Các khẳng định sau là tương đương đối với một môđun M:*

(1) *M là môđun nội xạ.*

(2) *M là môđun R_R-nội xạ.*

Một họ các môđun $\{M_i | i \in I\}$ được gọi là *nội xạ tương hỗ* hay *nội xạ lẫn nhau* nếu M_i là M_j-nội xạ với mọi $i \neq j$ và $i, j \in I$.

Chúng tôi nhắc lại sau đây một số kết quả của môđun nội xạ có liên quan đến luận án.

Bổ đề 1.2.2 ([34, Proposition 1.3, Proposition 1.5, Proposition 1.6]). *Cho vành R và các môđun được xét là các R-môđun phải. Khi đó:*

(1) *Cho M_1 và M_2 là các môđun. Nếu M_2 là M_1-nội xạ và N là môđun con của M_1 thì M_2 là N-nội xạ và (M_1/N)-nội xạ.*

(2) *Cho $\{M_i | i \in I\}$ và N là các môđun. Khi đó N là $(\oplus_{i \in I} M_i)$-nội xạ khi và chỉ khi N là M_i-nội xạ với mọi $i \in I$.*

(3) *Cho $\{M_i | i \in I\}$ và N là các môđun. Khi đó $\prod_{i \in I} M_i$ là N-nội xạ khi và chỉ khi M_i là N-nội xạ với mọi $i \in I$.*

Từ bổ đề trên ta thấy tích trực tiếp của các môđun nội xạ là một môđun nội xạ. Tuy nhiên, điều này không đúng với tổng trực tiếp trong trường hợp tổng quát.

Định lý 1.2.3 ([34, Theorem 1.11]). *Tổng trực tiếp của một họ các A-môđun nội xạ là A-nội xạ khi và chỉ khi mọi môđun con xiclic (hoặc hữu hạn sinh) của A là Noether. Đặc biệt, tổng trực tiếp của họ các R-môđun nội xạ là nội xạ khi và chỉ khi R là vành Noether phải.*

Cho M và N là các R-môđun phải, theo [52, Definitions, trang 118], một môđun N được gọi là *được sinh bởi* M *(*M*-sinh)* hay M *sinh ra* N nếu tồn tại toàn cấu $f : M^{(\Lambda)} \to N$, với tập chỉ số Λ nào đó. Môđun M được gọi là *tự sinh* nếu nó sinh ra mọi môđun con của nó, có nghĩa là với mọi môđun con A của M thì luôn tồn tại toàn cấu $f : M^{(\Lambda)} \to A$ với tập chỉ số Λ nào đó. Ta nói môđun N *được sinh con bởi* M hay M *là một vật sinh con của* N nếu N đẳng cấu với một môđun con của một môđun M-sinh. Ta ký hiệu $\sigma[M]$ là phạm trù con của phạm trù Mod-R mà các vật là các R-môđun phải được sinh con bởi M và các cấu xạ là các đồng cấu môđun. Rõ ràng, $\sigma[M]$ là phạm trù con đầy đủ của phạm trù Mod-R.

Kết quả sau nói về quan hệ giữa môđun nửa đơn và môđun nội xạ.

Hệ quả 1.2.4 ([11, 7.14])**.** *Các khẳng định sau là tương đương đối với một* R*-môđun* M*:*

(1) M *là nửa đơn.*

(2) *Mọi môđun xiclic trong* $\sigma[M]$ *là* M*-nội xạ.*

(3) *Mọi môđun thương con xiclic của* M *là* M*-nội xạ.*

Cho M là một R-môđun phải, đơn cấu $\alpha : M \to N$ được gọi là *bao nội xạ* của M nếu α là đơn cấu cốt yếu và N là môđun nội xạ. Khi $\alpha : M \to N$ là bao nội xạ thì ta thường gọi môđun N là bao nội xạ của M và ký hiệu là $N = E(M)$. Hơn nữa, vì mọi môđun nhúng cốt yếu được vào một môđun nội xạ nên mọi môđun đều có bao nội xạ.

Đối ngẫu với khái niệm môđun nội xạ, ta có khái niệm môđun xạ ảnh. Cho M và N là các R-môđun phải, M được gọi là N*-xạ ảnh* nếu mọi đồng cấu $f : M \to A$ và mỗi toàn cấu $g : N \to A$ đều tồn tại một đồng cấu $h : M \to N$ sao cho $f = gh$. Nếu môđun M là M-xạ ảnh thì ta gọi M là môđun *tựa xạ ảnh* hoặc *tự xạ ảnh*, và nếu môđun M là N-xạ ảnh với mọi R-môđun phải N thì M được gọi là môđun *xạ ảnh*.

Cho môđun M, toàn cấu $p : P \to M$ được gọi là *phủ xạ ảnh* của môđun M nếu p là toàn cấu bé và P là môđun xạ ảnh. Khi $p : P \to M$ là phủ xạ ảnh thì ta thường gọi môđun P là phủ xạ ảnh của M. Mặc dù mọi môđun đều là ảnh toàn cấu của một môđun xạ ảnh nào đó nhưng không phải môđun nào cũng có phủ xạ ảnh. Vành R mà mọi R-môđun có phủ xạ ảnh là vành hoàn chỉnh.

Chúng tôi nhắc lại một số kết quả liên quan đến môđun tựa nội xạ như sau.

Bổ đề 1.2.5 ([34, Corollary 1.14])**.** *Một môđun M là tựa nội xạ khi và chỉ khi $\varphi(M) \leq M$ với mọi tự đồng cấu φ của $E(M)$.*

Mệnh đề 1.2.6 ([34, Proposition 1.17])**.** *$M_1 \oplus M_2$ là tựa nội xạ khi và chỉ khi M_i là M_j nội xạ ($i, j = 1, 2$). Đặc biệt, hạng tử trực tiếp của một môđun tựa nội xạ là tựa nội xạ.*

Một môđun M được gọi là *thỏa mãn tính chất trao đổi* nếu với mỗi tập chỉ số I và mỗi phân tích

$$M \oplus N = \oplus_{i \in I} A_i$$

với các môđun N và A_i nào đó, $i \in I$, thì

$$M \oplus N = M \oplus (\oplus_{i \in I} B_i)$$

với B_i là môđun con của A_i, $i \in I$. Nếu điều này đúng với tập I hữu hạn thì M được gọi là *thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn* (xem [11] hoặc [34]).

Đã có nhiều kết quả về môđun thỏa mãn tính chất trao đổi (hữu hạn) nhưng ở đây chúng tôi chỉ đề cập đến một số kết quả sau đây.

Định lý 1.2.7 ([17, Theorem 3])**.** *Mọi môđun tựa nội xạ thỏa mãn tính chất trao đổi.*

Bổ đề 1.2.8 ([25], [54])**.** *Cho M là môđun với vành các tự đồng cấu địa phương. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(1) *$S := End(M)$ là vành nửa chính quy, nghĩa là $S/J(S)$ là vành chính quy (von Neumann) và các lũy đẳng nâng được modulo $J(S)$, với $J(S)$ là căn Jacobson của S.*

(2) *M thỏa mãn tính chất trao đổi.*

1.3 Vành nửa đơn Artin, vành hoàn chỉnh, nửa hoàn chỉnh và các trường hợp tổng quát

Mục này chúng tôi dùng để nhắc lại các khái niệm về vành nửa đơn (Artin), vành hoàn chỉnh, nửa hoàn chỉnh và các trường hợp tổng quát của chúng.

Trước khi trình bày về vành hoàn chỉnh và nửa hoàn chỉnh chúng ta cần những khái niệm về phần tử lũy đẳng sau đây.

Phần tử x của vành R được gọi là *phần tử lũy đẳng* nếu $x^2 = x$. Cặp phần tử lũy đẳng e, f của vành R được gọi là *trực giao* nếu $e.f = f.e = 0$. Tập $e_1, e_2, ..., e_n$ các lũy đẳng của vành R được gọi là *tập các lũy đẳng trực giao* nếu $e_i.e_j = 0$ với mọi cặp $i \neq j$. Một phần tử lũy đẳng $e \in R$ là *lũy đẳng nguyên thủy* nếu $e \neq 0$ và với mọi cặp lũy đẳng trực giao e_1, e_2 thỏa mãn $e = e_1 + e_2$ thì $e_1 = 0$ hoặc $e_2 = 0$. Lũy đẳng $e \in R$ được gọi là *lũy đẳng địa phương* nếu eRe là một vành địa phương. Tập $e_1, e_2, \ldots, e_n$ các lũy đẳng nguyên thủy trực giao của R được gọi là *đầy đủ* nếu

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n.$$

Cho vành R và I là một iđêan của R. Khi đó, nếu với mọi lũy đẳng $\bar{f} = f + I$ của vành thương R/I đều tồn tại lũy đẳng e của vành R sao cho $e - f \in I$ thì ta nói *các lũy đẳng của R nâng được modulo I* (hay mỗi lũy đẳng $\bar{f}$ của vành thương R/I đều nâng được đến một lũy đẳng e của vành R).

Một iđêan A của vành R được gọi là *T-lũy linh phải* nếu mọi dãy

$a_1, a_2, \ldots$ các phần tử của A đều tồn tại $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ sao cho

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 = 0.$$

Định nghĩa 1.3.1. Một vành R được gọi là *vành địa phương* nếu R có duy nhất một iđêan phải (hoặc trái) cực đại, hay tương đương, nếu $R/J(R)$ là một thể. Vành R là *nửa địa phương* nếu vành thương $R/J(R)$ là Artin nửa đơn.

Định nghĩa 1.3.2. Một vành R được gọi là vành *nửa hoàn chỉnh* nếu R là vành nửa địa phương và các lũy đẳng nâng được modulo $J(R)$. Vành R là *hoàn chỉnh phải* nếu R là vành nửa địa phương và $J(R)$ là T-lũy linh phải.

Định nghĩa 1.3.3. Một vành R được gọi là *vành chính quy* nếu với mỗi phần tử $x \in R$ đều tồn tại phần tử $y \in R$ sao cho $x = xyx$, và vành R được gọi là *nửa chính quy* nếu $R/J(R)$ là chính quy và các lũy đẳng nâng được modulo $J(R)$.

Vành chính quy có rất nhiều đặc trưng quan trọng, chúng tôi muốn đề cập đến một số kết quả sau đây.

Định lý 1.3.4 ([18, Theorem 1.1])**.** *Các khẳng định sau là tương đương đối với vành R.*

(1) *R là một vành chính quy.*

(2) *Mọi iđêan phải (trái) xiclic là hạng tử trực tiếp của R_R ($_RR$).*

(3) *Mọi iđêan phải (trái) hữu hạn sinh là hạng tử trực tiếp của R_R ($_RR$).*

Định nghĩa 1.3.5. Vành R được gọi là *Artin phải* (*Noether phải*, tương ứng) nếu R_R là môđun Artin (Noether, tương ứng).

Định lý 1.3.6 ([26, Theorem 6.5.1])**.** *Các khẳng định sau là tương đương đối với vành R:*

(1) *R là vành Noether phải.*

(2) *Mọi tổng trực tiếp của các R-môđun phải nội xạ là nội xạ.*

(3) *Mọi tổng trực tiếp đếm được các bao nội xạ của các R-môđun phải đơn là nội xạ.*

Định nghĩa 1.3.7 ([52, 3.1])**.** Một vành R được gọi là *vành đơn* nếu $R \neq 0$ và R chỉ có hai iđêan là 0 và R. Vành R là *nửa đơn* nếu nó là tổng trực tiếp của các iđêan phải (trái) cực tiểu, tương đương, là tổng trực tiếp của các vành đơn, hay tương đương, R_R ($_RR$) là môđun nửa đơn.

Khi nghiên cứu vành nửa đơn, chúng ta không cần đề cập đến phía của nó nhờ định lý sau.

Định lý 1.3.8 ([52, 20.7])**.** *Các khẳng định sau là tương đương đối với vành R:*

(1) *R là vành nửa đơn trái.*

(2) *R là vành nửa đơn phải.*

(3) *Mọi R-môđun là nội xạ.*

(4) *Mọi R-môđun (hữu hạn sinh) là xạ ảnh.*

(5) *Mọi R-môđun đơn là xạ ảnh.*

Tiếp theo chúng tôi muốn nhắc lại một số đặc trưng của vành nửa đơn liên quan đến phạm trù các R-môđun phải, sự phân tích thành tổng trực tiếp vành, vành chính quy và vành Artin.

Định lý 1.3.9 ([39, Theorem])**.** *Vành R là nửa đơn khi và chỉ khi mỗi R-môđun phải (trái) xiclic là nội xạ.*

Định lý 1.3.10. *(Wedderburn-Artin) Vành R là nửa đơn khi và chỉ khi nó là tổng trực tiếp vành của một số hữu hạn các vành ma trận trên một thể.*

Định lý 1.3.11. *Vành R là nửa đơn khi và chỉ khi R là vành chính quy và không chứa tập vô hạn các phần tử lũy đẳng trực giao.*

Định lý 1.3.12. *Vành R là nửa đơn khi và chỉ khi R là Artin phải hay trái và $J(R) = 0$.*

Khi nghiên cứu về căn của vành, Jacobson đã từng định nghĩa một vành R là nửa đơn khi $J(R) = 0$, và có một số nhà toán học sử dụng định nghĩa này. Do đó để tránh nhầm lẫn, trong toàn bộ luận án, chúng tôi gọi vành nửa đơn như trong Định nghĩa 1.3.7 là vành Artin nửa đơn.

Chúng tôi sẽ tiếp tục với phần giới thiệu về vành nửa Artin.

Định nghĩa 1.3.13. Một môđun M được gọi là *nửa Artin* nếu mọi môđun thương khác không của M có đế khác không. Một vành R được gọi là *vành nửa Artin phải* nếu R_R là môđun nửa Artin.

Định lý 1.3.14 ([37, Lemma B.31])**.** *Các khẳng định sau là tương đương đối với vành R:*

(1) *R là vành nửa Artin phải.*

(2) *Mọi R-môđun phải khác không có đế cốt yếu.*

(3) *Mọi R-môđun phải khác không có môđun con đơn.*

(4) *Mọi R-môđun phải là nửa Artin.*

Định nghĩa 1.3.15 ([16])**.** Vành R được gọi là *V-vành* phải nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện tương đương sau:

(1) Mọi R-môđun phải đơn là nội xạ.

(2) Mọi iđêan phải của R là giao của các iđêan phải cực đại.

Chương 2

Môđun nội xạ cốt yếu và các mở rộng

Trong chương này, chúng tôi chủ yếu nghiên cứu một mở rộng của môđun nội xạ, đó là môđun nội xạ cốt yếu. Chúng tôi đưa ra các tính chất của môđun nội xạ cốt yếu và môđun tựa nội xạ cốt yếu, đồng thời giới thiệu các kết quả liên quan giữa lớp môđun nội xạ cốt yếu và lớp môđun bất biến đẳng cấu. Chương này được viết dựa trên các kết quả của bài báo [42].

2.1 Định nghĩa và ví dụ

Trước hết, chúng tôi nhắc lại các định nghĩa về môđun nội xạ cốt yếu trong Dung-Huynh-Smith-Wisbauer ([11]).

Định nghĩa 2.1.1. Cho M và N là hai R-môđun phải.

(1) M được gọi là N-*nội xạ cốt yếu* nếu mọi đồng cấu với hạt nhân cốt yếu từ một môđun con của N vào M mở rộng được tới N.

(2) M được gọi là *tựa (tự) nội xạ cốt yếu* nếu M là M-nội xạ cốt yếu.

(3) M được gọi là môđun *nội xạ cốt yếu* nếu M là N-nội xạ cốt yếu với mọi môđun phải N.

(4) Hai môđun M và N được gọi là *nội xạ cốt yếu lẫn nhau* (hay *nội xạ cốt yếu tương hỗ*) nếu M là N-nội xạ cốt yếu và N là M-nội xạ cốt

yếu.

(5) Vành R được gọi là vành *tựa nội xạ cốt yếu phải* nếu R_R là môđun tựa nội xạ cốt yếu.

Chúng ta cũng chú ý rằng môđun M là môđun nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi M là môđun R_R-nội xạ cốt yếu (xem [11]).

Từ Định nghĩa 2.1.1 ta có, nếu M là môđun nội xạ thì M là nội xạ cốt yếu, và nếu M là tựa nội xạ thì M là tựa nội xạ cốt yếu. Điều ngược lại không đúng trong trường hợp tổng quát. Ta xét các ví dụ sau.

Ví dụ 2.1.2. (1) Cho $n > 1$, khi đó $\mathbb{Z}_n$ là $\mathbb{Z}$-môđun tựa nội xạ, do đó $\mathbb{Z}_n$ cũng là môđun tựa nội xạ cốt yếu. Thật vậy, giả sử I là một iđêan của $\mathbb{Z}_n$, khi đó I có dạng $I = d\mathbb{Z}_n$, trong đó d là ước của n, $n = dm$. Xét $\alpha : I \to \mathbb{Z}_n$ và giả sử $\alpha(\bar{d}) = \bar{k}$. Khi đó

$$\alpha(\bar{0}) = \alpha(\bar{n}) = \alpha(\bar{d}\bar{m}) = \bar{m}\alpha(\bar{d}) = \bar{m}\bar{k} = \bar{0}.$$

Từ đó, $mk \,\vdots\, n$, hay $mk = en = edm$, và do đó $k = ed$. Xét đồng cấu $\beta : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ được xác định bởi $\beta(\bar{x}) = \bar{x}e$. Khi đó

$$\beta(\bar{d}) = \bar{d}e = \bar{k} = \alpha(\bar{d})$$

nghĩa là β là mở rộng của α, suy ra $\mathbb{Z}_n$ là tựa nội xạ, và do đó là tựa nội xạ cốt yếu.

(2) Mọi môđun không suy biến là môđun nội xạ cốt yếu. Thật vậy, cho N là môđun bất kỳ và M là môđun suy biến. Xét đồng cấu $\alpha : A \to M$ với A là môđun con của N và $Ker(\alpha) \leq^e A$. Vì $Ker(\alpha) \leq^e A$ nên $A/Ker(\alpha)$ là môđun suy biến, mà $A/Ker(\alpha) \cong Im(\alpha)$ nên $Im(\alpha)$ cũng là môđun suy biến. Mặt khác $Im(\alpha) = \alpha(A) \leq Z(M)$. Vì M là môđun không suy biến nên $\alpha(A) \leq Z(M) = 0$, suy ra α chính là đồng cấu không. Cụ thể, $\mathbb{Z}$ là $\mathbb{Z}$-môđun suy biến nên nó là nội xạ cốt yếu, đồng thời cũng là $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-nội xạ cốt yếu.

(3) Cho A là một môđun nội xạ chỉ có một môđun con thực sự S. B là môđun không phân tích được và chứa một môđun con đơn Y không đẳng cấu với S. Khi đó B là A-nội xạ cốt yếu nhưng không là A-nội xạ. Thật vậy, vì A chỉ có một môđun con thực sự là S nên nếu xét đồng cấu $f : X \to B$ với X là một môđun con của A thì chỉ xảy ra ba trường hợp. Hai trường hợp tầm thường khi f là đồng cấu không hay đồng cấu $f : A \to B$. Đối với trường hợp còn lại $f : S \to B$ thì $Ker(f) = S$ hoặc $Ker(f) = 0$ (Vì B là môđun không phân tích được). Do $Ker(f) = 0 \not\leq^e S$ nên ta chỉ xét trường hợp $Ker(f) = S$, hay f chính là đồng cấu không. Vậy B là A-nội xạ cốt yếu. Tuy nhiên B không là A-nội xạ do đồng cấu $f : S \to B$ sao cho $f(S) = B$ không mở rộng được đến A.

(4) Với p là số nguyên tố, ta xét các $\mathbb{Z}$-môđun $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$. Khi đó, môđun $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ là $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$-nội xạ cốt yếu nhưng không là $(\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z})$-nội xạ cốt yếu, đồng thời $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ cũng không là $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$-nội xạ.

Tiếp theo chúng tôi nhắc lại một số tính chất của môđun nội xạ cốt yếu đã được trình bày trong [11] và [43].

Bổ đề 2.1.3 ([11, 2.15, 2.16])**.** *Cho M và N là các môđun. Khi đó:*

(1) *Nếu M là N-nội xạ cốt yếu thì M cũng là K-nội xạ cốt yếu và là N/K-nội xạ cốt yếu với môđun con K của N.*

(2) *M là N-nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi M là nR-nội xạ cốt yếu với mọi $n \in N$.*

(3) *Xét $\{N_i | i \in I\}$ là một họ các R-môđun phải. Khi đó M là $\oplus_{i\in I} N_i$-nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi M là N_i-nội xạ cốt yếu với mọi $i \in I$.*

(4) *Với các R-môđun phải $M_1, M_2, \ldots, M_n$, tổng trực tiếp $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ là N-nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi M_i là N-nội xạ cốt yếu với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

(5) *Tích trực tiếp* $\prod_I U_i$ *là* N*-nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi mỗi* U_i *là* N*-nội xạ cốt yếu.*

Bổ đề 2.1.4 ([43, Lemma 4])**.** *Cho* M_1 *và* M_2 *là các môđun và đặt* $M := M_1 \oplus M_2$. *Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(1) M_2 *là* M_1*-nội xa cốt yếu.*

(2) M_2 *là* (M_1/X)*-nội xạ, với mọi môđun con cốt yếu* X *của* M_1.

(3) *Với mọi môđun con (đóng)* N *của* M *thỏa mãn* $N \cap M_1 \leq^e M_1$ *và* $N \cap M_2 = 0$, *luôn tồn tại một môđun con* N' *của* M *sao cho* $N \leq N'$ *và* $M = N' \oplus M_2$.

(4) *Với mọi môđun con đóng* N *của* M *thỏa mãn* $N \cap M_1 \leq^e M_1$ *và* $N \cap M_2 = 0$ *thì* $M = N' \oplus M_2$.

(5) *Với mọi môđun con (đóng)* N *của* M *thỏa mãn* $N \cap M_1 \leq^e N$, *luôn tồn tại một môđun con* N' *của* M *sao cho* $N \leq N'$ *và* $M = N' \oplus M_2$.

Trong những năm gần đây, việc nghiên cứu lớp các môđun bất biến dưới các tập con của tập các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó được nhiều tác giả quan tâm. Có thể kể đến những kết quả tiêu biểu như Lee-Zhou ([32], 2013), Guil Asensio-Tutuncu-Srivastava ([20], 2015), Quynh-Kosan ([41], 2015), Thuyet-Dan-Quynh ([47], 2016), Guil Asensio-Tutuncu-Kalebogaz-Srivastava ([21], 2016), Tuganbaev ([48], [50], 2017; [49], 2018). Chúng tôi sẽ nhắc lại sau đây một số định nghĩa và tính chất của lớp môđun này để sử dụng trong quá trình chứng minh các kết quả của luận án.

Định nghĩa 2.1.5 ([32, Definition 1])**.** Môđun M được gọi là *môđun bất biến đẳng cấu* nếu nó bất biến dưới mọi tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó, nghĩa là với mọi đẳng cấu $\alpha : E(M) \to E(M)$ thì $\alpha(M) \leq M$.

Định nghĩa 2.1.6 ([41])**.** Cho M và N là các môđun. M được gọi là N*-bất biến đẳng cấu* nếu với mọi môđun con cốt yếu A của N, mọi đơn cấu cốt yếu $f : A \to M$ mở rộng được đến một đồng cấu $g : N \to M$, nếu M là M-bất biến đẳng cấu thì M được gọi là môđun bất biến đẳng cấu.

Cũng trong bài báo [41], các tác giả đã chứng minh được rằng Định nghĩa 2.1.5 và Định nghĩa 2.1.6 là trùng nhau khi $M = N$.

Định lý 2.1.7 ([32, Theorem 2])**.** *Các khẳng định sau là tương đương đối với một môđun M:*

(1) *M là môđun bất biến đẳng cấu.*

(2) *Mọi đẳng cấu giữa hai môđun con cốt yếu của M đều mở rộng được đến một tự đồng cấu của M.*

(3) *Mọi đẳng cấu giữa hai môđun con cốt yếu của M mở rộng được đến một tự đẳng cấu của M.*

Bổ đề 2.1.8 ([32, Lemma 4])**.** *Hạng tử trực tiếp của một môđun bất biến đẳng cấu là môđun bất biến đẳng cấu.*

Các kết quả sau cho ta quan hệ giữa môđun bất biến đẳng cấu và môđun nội xạ.

Định lý 2.1.9 ([32, Theorem 5])**.** *Nếu tổng trực tiếp $M_1 \oplus M_2$ là bất biến đẳng cấu thì M_1 và M_2 là các môđun nội xạ tương hỗ.*

Hệ quả 2.1.10 ([41, Corollary 2.16])**.** *Các khẳng định sau là tương đương đối với một vành giao hoán R:*

(1) *R là vành nửa đơn.*

(2) *Mọi tổng trực tiếp của hai môđun bất biến đẳng cấu là bất biến đẳng cấu.*

(3) *Mọi môđun bất biến đẳng cấu là nội xạ.*

Một môđun con N của M được gọi là *bất biến hoàn toàn* nếu $f(N) \leq N$ với mọi $f \in End(M_R)$.

Định lý 2.1.11 ([41, Theorem 2.5]). *Các khẳng định sau là tương đương đối với một môđun M:*

(1) *Mọi môđun con của M là bất biến đẳng cấu.*

(2) *M là môđun bất biến đẳng cấu và mọi môđun con cốt yếu của M là bất biến hoàn toàn dưới các tự đẳng cấu của M.*

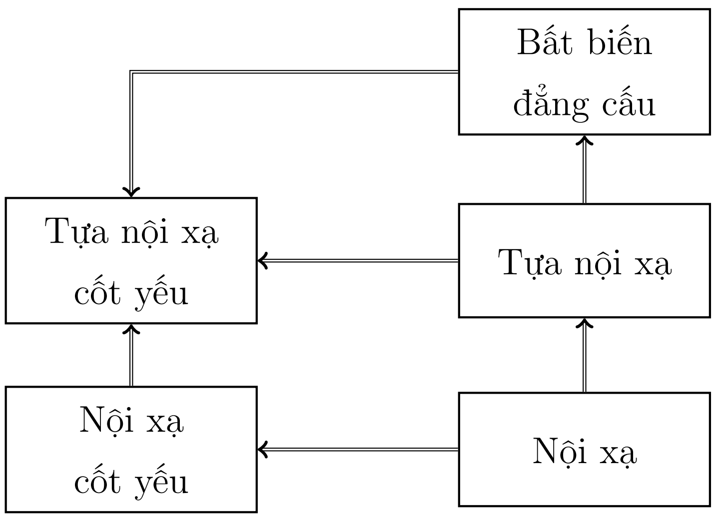
(3) *Mọi môđun con cốt yếu của M là bất biến đẳng cấu.*

Định lý 2.1.12 ([41, Theorem 2.15]). *Các khẳng định sau là đúng đối với một vành R:*

(1) *Tổng trực tiếp của hai môđun bất biến đẳng cấu là bất biến đẳng cấu khi và chỉ khi các môđun bất biến đẳng cấu là nội xạ. Hơn nữa, R là V-vành phải và Noether phải.*

(2) *Mở rộng cốt yếu của các R-môđun phải đơn là bất biến đẳng cấu khi và chỉ khi R là V-vành phải và Noether phải.*

Chúng tôi tổng hợp các mối quan hệ giữa các môđun bởi sơ đồ sau.



SƠ ĐỒ VỀ MỐI QUAN HỆ GIỮA LỚP CÁC MÔĐUN

2.2 Các kết quả liên quan đến môđun nội xạ cốt yếu và môđun bất biến đẳng cấu

Trong phần đầu của mục này chúng tôi chủ yếu nghiên cứu các tính chất của môđun nội xạ cốt yếu ngoài những tính chất đã được Dung-Huynh-Smith-Wisbauer đưa ra trong [11], và Santa-Clara nghiên cứu trong [43].

Kết quả đầu tiên mà chúng tôi muốn giới thiệu về môđun N-nội xạ cốt yếu như sau.

Bổ đề 2.2.1. *Các điều kiện sau là tương đương đối với các môđun M và N:*

(1) *M là N-nội xạ cốt yếu.*

(2) *Với mỗi R-môđun phải A, với mỗi đơn cấu cốt yếu $g : A \to N$ và mỗi đồng cấu $f : A \to M$ có hạt nhân cốt yếu, luôn tồn tại đồng cấu $h : N \to M$ sao cho $f = hg$.*

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Cho A là một R-môđun phải, $g : A \to N$ là một đơn cấu cốt yếu (nghĩa là $g(A) \leq^e N$) và đồng cấu $f : A \to M$ có $Ker(f) \leq^e A$. Ta chọn đồng cấu $f' : g(A) \to M$ sao cho $f'(g(a)) = f(a)$ với mọi $a \in A$. Ta cần chứng minh rằng $Ker(f') \leq^e g(A)$. Thật vậy, với mọi $x \neq 0$ và $x \in g(A)$, chúng ta viết $x = g(a)$ với $a \in A, a \neq 0$. Lúc đó tồn tại $r \in R$ để $0 \neq ar \in Ker(f)$ (vì $Ker(f) \leq^e A$) hay $f(ar) = 0$. Suy ra $f'g(ar) = 0$ hay $g(ar) \in Ker(f')$. Do đó $0 \neq xr \in Ker(f')$ (vì giả sử ngược lại, nếu $xr = 0$ thì $g(ar) = 0$ suy ra $ar = 0$, mâu thuẫn với giả thiết), nên $Ker(f') \leq^e g(A)$. Vì M là N-nội xạ cốt yếu nên tồn tại $h : N \to M$ sao cho $hi_{g(A)} = f'$ (với $i_{g(A)} : g(A) \to N$), suy ra $hg(a) = f'(g(a)) = f(a)$ với mọi $a \in A$. Vậy $f = hg$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Với mọi R-môđun phải $A \leq N$, luôn tồn tại môđun $B \leq N$ sao cho $A \oplus B \leq^e N$. Với mỗi đồng cấu $f : A \to M$ mà $Ker(f) \leq^e A$, ta chọn đồng cấu $f' : A \oplus B \to M$ sao cho $f'(a + b) = f(a)$ với mọi $a + b \in A \oplus B$.

Xét $i_{(A\oplus B)} : A \oplus B \to N$ là đơn cấu chính tắc. Với mọi $a + b \in A \oplus B$ ta có $f'(a + b) = 0$, suy ra $f(a) = 0$ hay $a \in Ker(f)$. Do đó

$$Ker(f') = Ker(f) \oplus B \leq^e A \oplus B.$$

Theo giả thiết, tồn tại đồng cấu $h : N \to M$ sao cho $hi_{(A\oplus B)} = f'$. Suy ra với mọi $a \in A$ ta có

$$hi_{(A\oplus B)}(a) = f'(a) = f(a),$$

hay $h(a) = f(a)$ với mọi $a \in A$, suy ra h là mở rộng của f. Vậy M là N-nội xạ cốt yếu. □

Cho M và N là các R-môđun phải. Căn của $Hom(M, N)$ được giới thiệu và nghiên cứu bởi các tác giả Kasch-Mader (xem [31]) và Nicholson-Zhou (xem [38], [53]). Chúng tôi xin nhắc lại một số đặc trưng sau đây.

$$\begin{aligned} J[M, N] &= \{\alpha \in Hom(M, N) : 1_N - \alpha\beta \in Aut(N), \forall \beta \in Hom(N, M)\} \\ &= \{\alpha \in Hom(M, N) : 1_M - \beta\alpha \in Aut(M), \forall \beta \in Hom(N, M)\} \\ &= \{\alpha \in Hom(M, N) : \alpha\beta \in J(End(N)), \forall \beta \in Hom(N, M)\} \\ &= \{\alpha \in Hom(M, N) : \beta\alpha \in J(End(M)), \forall \beta \in Hom(N, M)\}. \end{aligned}$$

Chúng tôi muốn đề cập đến một kết quả quan trọng về tính nội xạ do Johnson-Wong đưa ra trong [24]: Với hai R-môđun bất kỳ M và N, thì M là N-nội xạ khi và chỉ khi $f(N) \leq M$ với R-đồng cấu $f : E(N) \to E(M)$ từ bao nội xạ của N vào bao nội xạ của M. Định lý sau đây của chúng tôi là mở rộng kết quả trên cho môđun M là N-nội xạ cốt yếu, đồng thời chúng tôi cũng đưa ra điều kiện tương đương của M là N-nội xạ cốt yếu thông qua $J[E(N), E(M)]$.

Định lý 2.2.2. *Các điều kiện sau là tương đương đối với các môđun M và N:*

(1) *M là N-nội xạ cốt yếu.*

(2) *Với mỗi R-đồng cấu $\alpha : E(N) \to E(M)$ từ bao nội xạ của N vào bao nội xạ của M với hạt nhân cốt yếu thì $\alpha(N) \leq M$.*

(3) *$\alpha(N) \leq M$ với mọi α nằm trong $J[E(N), E(M)]$ của $Hom(E(N), E(M))$.*

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Lấy $\alpha : E(N) \to E(M)$ là một đồng cấu từ bao nội xạ của N vào bao nội xạ của M có hạt nhân cốt yếu, và đặt

$$A := N \cap \alpha^{-1}(M).$$

Chúng ta xác định một đồng cấu $f := \alpha|_A : A \to M$ là hạn chế của α trên A có hạt nhân $Ker(f)$ là $A \cap Ker(\alpha)$. Điều này kéo theo $Ker(f)$ là một môđun con cốt yếu của A và $\alpha(A) = \alpha(N) \cap M \leq M$. Vì M là N-nội xạ cốt yếu, nên tồn tại đồng cấu $g : N \to M$ mà $g(a) = f(a)$ với mọi $a \in A$. Để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra $g(n) = \alpha(n)$ với mọi $n \in N$. Thật vậy, giả sử $g(n_0) \neq \alpha(n_0)$ với $n_0 \in N$ nào đó, ta viết $x = g(n_0) - \alpha(n_0) \in E(M)$ và $x \neq 0$. Vì M là một môđun con cốt yếu của $E(M)$ nên tồn tại $r \in R$ sao cho

$$0 \neq xr = g(n_0 r) - \alpha(n_0 r) \in M.$$

Vì vậy, $\alpha(n_0 r) \in M$ hay $n_0 r \in A$. Do đó, $g(n_0 r) = \alpha(n_0 r)$ hay $xr = 0$, điều này mâu thuẫn.

(2) $\Rightarrow$ (1) Lấy A là một môđun con của N và $f : A \to M$ là đồng cấu với $Ker(f) \leq^e A$. Xét các phép nhúng $i_A : A \to E(A)$ và $i_M : M \to E(M)$. Ta có $E(M)$ là một R-môđun phải nội xạ và do đó tồn tại một đồng cấu $g_1 : E(A) \to E(M)$ thỏa mãn $g_1 \circ i_A = i_M \circ f$. Ta cần chỉ ra $Ker(g_1)$ là một môđun con cốt yếu của $E(A)$. Thật vậy, lấy $x \neq 0, x \in E(A)$, khi đó sẽ tồn tại $r \in R$ sao cho $0 \neq xr \in A$ (vì $A \leq^e E(A)$). Tương tự, tồn tại $r_1 \in R$ sao cho $0 \neq xrr_1 \in Ker(f)$ (vì $Ker(f) \leq^e A$), suy ra $f(xrr_1) = 0$ kéo theo $g_1(xrr_1) = 0$, hay $g_1(xrr_1) = 0$, nghĩa là $0 \neq xrr_1 \in Ker(g_1)$. Vậy $Ker(g_1) \leq^e E(A)$. Mặt khác, tồn tại một môđun con B của $E(N)$ mà $E(N) = E(A) \oplus B$. Ta xét $\pi : E(N) \to E(A)$ là phép chiếu chính tắc. Khi đó hợp thành của π và g_1 là đồng cấu $g = g_1 \circ \pi : E(N) \to E(M)$ có hạt

nhân $Ker(g_1) \oplus B \leq^e E(A) \oplus B = E(N)$. Từ (2) ta có $g(N) \leq M$. Đặt $h := g|_N : N \to M$ là hạn chế của g trên N. Lúc đó ta có

$$(h \circ i_A)(a) = h(a) = g(a) = g_1(a) = f(a)$$

với mọi $a \in A$, nghĩa là $h \circ i_A = f$. Vậy M là N-nội xạ cốt yếu.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Theo [40, Theorem 3.2]. □

Từ Định lý 2.2.2, khi cho $N = M$, ta có được hệ quả dưới đây.

Hệ quả 2.2.3. *Các điều kiện sau là tương đương đối với môđun M:*

(1) *M là môđun tựa nội xạ cốt yếu.*

(2) *$\alpha(M) \leq M$ với mỗi tự đồng cấu α của $E(M)$ với hạt nhân cốt yếu.*

(3) *$\alpha(M) \leq M$ với mọi $\alpha \in J(End(E(M)))$.*

Mệnh đề sau của chúng tôi là mở rộng của Bổ đề 2.1.3.

Mệnh đề 2.2.4. *Cho M và N là hai R-môđun phải. Khi đó:*

(1) *M là N-nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi M là K-nội xạ cốt yếu với mỗi môđun con cốt yếu K của N.*

(2) *Nếu M là N-nội xạ cốt yếu và $K \cong N$ thì M là K-nội xạ cốt yếu.*

(3) *Giả sử $N = A \oplus B$, $M = C \oplus D$ và $\alpha : B \to D$ là một đồng cấu với hạt nhân cốt yếu. Nếu M là N-nội xạ cốt yếu thì C là A-nội xạ cốt yếu.*

(4) *Cho M_1 và M_2 là các môđun, và xét $M := M_1 \oplus M_2$. Khi đó M là tựa nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi M_1 và M_2 là tựa nội xạ cốt yếu, và nội xạ cốt yếu tương hỗ.*

Chứng minh. (1) Cho M là một R-môđun phải N-nội xạ cốt yếu và K là một môđun con cốt yếu của N. Xét $g : E(N) \to E(M)$ là một đồng cấu với hạt nhân cốt yếu. Vì M là N-nội xạ cốt yếu nên $g(N)$ được chứa trong M. Do K là một môđun con cốt yếu của N, $E(K) = E(N)$ và $g(K)$ được chứa trong M, nên M là K-nội xạ cốt yếu theo Định lý 2.2.2. Điều ngược lại là hiển nhiên.

(2) Giả sử M là N-nội xạ cốt yếu và $\alpha : K \to N$ là một đẳng cấu của các R-môđun phải. Ta sẽ chỉ ra M là K-nội xạ cốt yếu. Thật vậy, lấy A là một môđun con của K và $f : A \to M$ là đồng cấu với hạt nhân cốt yếu. Vì M là N-nội xạ cốt yếu nên tồn tại một đồng cấu $g : N \to M$ sao cho $g \circ \alpha \circ i_A = f$, trong đó $i_A : A \to K$ là phép nhúng của A vào K. Đặt $h = g \circ \alpha : K \to M$ thì $h \circ i_A = f$. Từ đây suy ra M là K-nội xạ cốt yếu.

(3) Giả sử các R-môđun phải M và N có sự phân tích $N = A \oplus B$ và $M = C \oplus D$, và tồn tại một đồng cấu $\alpha : B \to D$ từ R-môđun phải B vào R-môđun phải D với hạt nhân cốt yếu. Lấy H là một môđun con của A và $f : H \to C$ là một đồng cấu với hạt nhân cốt yếu. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng f có thể mở rộng tới A. Thật vậy, xét đồng cấu $\gamma := f \oplus \alpha : H \oplus B \to M$. Khi đó

$$Ker(\gamma) = Ker(f) \oplus Ker(\alpha) \leq^e H \oplus B.$$

Vì M là N-nội xạ cốt yếu tồn tại $g : N \to M$ sao cho hạn chế của g trên $H \oplus B$ chính là γ. Đặt $i_A : A \to N$ và $\pi : M \to C$ lần lượt là phép nhúng và phép chiếu chính tắc, và $\bar{f} = \pi \circ g \circ i_A$. Rõ ràng hạn chế của $\bar{f}$ trên H là f. Điều này suy ra C là A-nội xạ cốt yếu.

(4) (:$\Rightarrow$) Theo Bổ đề 2.1.3 (1) và (4).

($\Leftarrow$:) Đặt $E := E(M), E_1 := E(M_1)$ và $E_2 := E(M_2)$. Dễ dàng kiểm tra rằng $E = E_1 \oplus E_2$ và biểu diễn ma trận tự nhiên của $J[E, E]$ có dạng

$$J[E, E] = \begin{pmatrix} J[E_1, E_1] & J[E_2, E_1] \\ J[E_1, E_2] & J[E_2, E_2. \end{pmatrix}.$$

Lấy $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} J[E_1, E_1] & J[E_2, E_1] \\ J[E_1, E_2] & J[E_2, E_2] \end{pmatrix}$ là một phần tử bất kỳ của $J[E, E]$ với $\alpha_{ij} \in J[E_j, E_i]$, $i, j \in \{1, 2\}$. Xét $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ là một phần tử của M. Khi đó ta có

$$\alpha(m) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(m_1) + \alpha_{12}(m_2) \\ \alpha_{21}(m_1) + \alpha_{22}(m_2) \end{pmatrix}.$$

Vì M_1 là tựa nội xạ cốt yếu và đồng thời M_1 cũng là M_2-nội xạ cốt yếu nên $\alpha_{11}(m_1), \alpha_{12}(m_2) \in M_1$, do đó $\alpha_{11}(m_1) + \alpha_{12}(m_2) \in M_1$. Làm tương tự với môđun M_2, chúng ta cũng thu được $\alpha_{21}(m_1) + \alpha_{22}(m_2) \in M_2$. Điều đó nghĩa là $\alpha(m) \in M$. Vì thế M là tựa nội xạ cốt yếu. □

Định lý sau đây của chúng tôi là mở rộng của Định lý 2.1.11.

Định lý 2.2.5. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải M:*

(1) *Mọi môđun con của M là tựa nội xạ cốt yếu.*

(2) *M là tựa nội xạ cốt yếu và mọi môđun con cốt yếu của M là bất biến hoàn toàn dưới các tự đồng cấu của M với hạt nhân cốt yếu.*

(3) *Mọi môđun con cốt yếu của M là tựa nội xạ cốt yếu.*

Chứng minh. Đầu tiên chúng ta có nhận xét sau: Cho $f : M \to M$ là một đồng cấu với $Ker(f) \leq^e M$. Từ tính nội xạ của $E(M)$ ta có đồng cấu $g : E(M) \longrightarrow E(M)$ sao cho hạn chế của g trên M là f. Do đó $Ker(g)$ là một môđun con cốt yếu của $E(M)$, điều này chỉ ra rằng mỗi tự đồng cấu của M với hạt nhân cốt yếu mở rộng được tới một tự đồng cấu của bao nội xạ của nó với hạt nhân cốt yếu.

(1) $\Rightarrow$ (2) Giả sử mọi môđun con của M là tựa nội xạ cốt yếu, dĩ nhiên M cũng là môđun tựa nội xạ cốt yếu. Lấy N là một môđun con cốt yếu của M, suy ra $E(N) = E(M)$. Ta lấy f là một tự đồng cấu của M với hạt nhân cốt yếu. Theo chú thích trên, tồn tại một tự đồng cấu g của $E(M)$ với hạt nhân cốt yếu sao cho $g(m) = f(m)$ với $m \in M$. Theo giả thiết, N là một R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu, và do đó $g(N)$ được chứa trong N hoặc $f(N) \leq N$. Suy ra N là bất biến hoàn toàn dưới các tự đồng cấu của M

với hạt nhân cốt yếu.

(2) $\Rightarrow$ (3) Giả sử M là một R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu và mọi môđun con cốt yếu của M bất biến dưới các tự đồng cấu của M với hạt nhân cốt yếu. Lấy N là một môđun con cốt yếu của M. Khi đó $E(M) = E(N)$ và theo giả thiết, N bất biến hoàn toàn dưới các tự đồng cấu của M với hạt nhân cốt yếu. Xét g là một tự đồng cấu của $E(M)$ với hạt nhân cốt yếu. Từ tính tựa nội xạ cốt yếu của M, ta suy ra $g(M) \leq M$. Khi đó đồng cấu hạn chế $g|_M$ của g trên M là một tự đồng cấu của M với hạt nhân cốt yếu, và vì vậy $g(N) \leq N$. Từ Hệ quả 2.2.3 ta thu được N là tựa nội xạ cốt yếu.

(3) $\Rightarrow$ (1) là hiển nhiên. $\square$

Từ Định nghĩa 2.1.5 và Hệ quả 2.2.3 ta thấy ngay rằng mọi môđun bất biến đẳng cấu là môđun tựa nội xạ cốt yếu, nhưng điều ngược lại không đúng trong trường hợp tổng quát. Ta xét các ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.2.6. (1) Xét môđun M có dàn các môđun con là $0, M, N_1, N_2, N_1 \oplus N_2$ sao cho N_1 không đẳng cấu với N_2 và vành các tự đồng cấu của N_1 hoặc N_2 không đẳng cấu với $\mathbb{Z}_2$. Khi đó M là môđun tựa nội xạ cốt yếu nhưng không bất biến đẳng cấu.

$$\begin{tikzcd}
& M & \\
& N_1 \oplus N_2 \arrow[u] & \\
N_1 \arrow[ur] & & N_2 \arrow[ul] \\
& 0 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(2) Cho F_i là trường và K_i là một trường con thực sự của F_i với $i \geq 1$. Gọi R là ký hiệu cho tập tất cả các dãy trong $\prod F_i$ với hầu hết các phần tử trong K_i. Khi đó R là vành tựa nội xạ cốt yếu giao hoán nhưng không là vành bất biến đẳng cấu (nếu R_R là môđun bất biến đẳng cấu thì vành R được gọi là vành bất biến đẳng cấu phải).

(3) Mỗi miền nguyên giao hoán là một môđun tựa nội xạ cốt yếu trên chính nó. Hơn nữa, nếu R không là trường thì R không là vành bất biến đẳng cấu. Thật vậy, giả sử Q là trường các thương của R, khi đó Q_R là bao nội xạ của R_R. Ta lấy $f : Q \to Q$ là một R-đồng cấu với hạt nhân cốt yếu. Vì hạt nhân của f là một iđêan của Q nên $Ker(f) = Q$ hoặc $f = 0$. Suy ra R là môđun tựa nội xạ cốt yếu theo Hệ quả 2.2.3.

Xét M và N là các R-môđun phải, chúng tôi ký hiệu

$$\Delta[M, N] = \{f \in Hom(M, N) : Ker(f) \leq^e M\}.$$

và

$$\Delta(M) = \{f \in End(M) : Ker(f) \leq^e M\}.$$

Dễ dàng nhận thấy $\Delta(M)$ là một iđêan của $End(M)$.

Nhận xét 2.2.7. (1) Chú ý rằng nếu M là môđun nội xạ thì $\dfrac{End(M)}{J(End(M))}$ là vành chính quy, và mỗi phần tử lũy đẳng của nó nâng được modulo $J(End(M))$, đồng thời ta cũng có $\Delta(M) = J(End(M))$.

(2) Giả sử M là R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu. Xét $u : M \to E(M)$ là bao nội xạ và $g \in \Delta(E(M))$. Khi đó tồn tại một đồng cấu $f \in \Delta(M)$ thỏa mãn $u \circ f = g \circ u$. Ngoài ra, nếu u là đơn cấu cốt yếu thì ánh xạ

$$\theta : \Delta(E(M)) \to \Delta(M)$$

biến $g \mapsto f$ là một đồng cấu nhóm song ánh mà hạt nhân gồm các tự đồng cấu $g \in \Delta(E(M))$ sao cho $g \circ u = u$.

(3) Vành các tự đồng cấu của một môđun tựa nội xạ cốt yếu không nhất thiết là vành nửa chính quy. Ví dụ $\mathbb{Z}$-môđun $\mathbb{Z}$ là tựa nội xạ cốt yếu nhưng không là nửa chính quy.

(4) Cho M là R-môđun phải và $u : M \to E(M)$ là bao nội xạ của M. Gọi $S = End(E(M))$. Khi đó ta có đồng cấu vành

$$\Phi : End(M) \to End(E(M))/J(End(E(M)))$$

được xác định bởi $\Phi(f) = \bar{f} + J(End(E(M)))$, trong đó $\bar{f} : E(M) \to E(M)$ sao cho $\bar{f} \circ u = u \circ f$. Rõ ràng $\Delta(M) = Ker(\Phi)$, do đó chúng ta có đơn cấu vành

$$\bar{\Phi} : M/\Delta(M) \to End(E(M))/J(End(E(M))).$$

Đồng nhất $End(M)/\Delta(M)$ với $Im(\bar{\Phi})$, chúng ta có thể xem $\dfrac{End(M)}{\Delta(M)}$ như là một vành con của vành $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$

Theo Nhận xét 2.2.7(3), vành các tự đồng cấu của môđun tựa nội xạ cốt yếu không nhất thiết là vành nửa chính quy, tuy nhiên chúng tôi đã chứng minh được rằng nếu bổ sung thêm điều kiện hạt nhân của các đồng cấu là cốt yếu thì điều đó là đúng. Kết quả đó được giới thiệu trong định lý sau.

Định lý 2.2.8. *Cho một R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu M với bao nội xạ $u : M \to E(M)$. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(1) $\Delta(M) \subseteq J(End(M))$.

(2) *Mọi phần tử lũy đẳng của $End(M)$ đều nâng được theo modulo $\Delta(M)$.*

Chứng minh. (1) Theo giả thiết, ta có $\Delta(E(M)) = J(End(E(M)))$ (Nhận xét 2.2.7). Lấy j là một phần tử bất kỳ của $\Delta(M)$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $1 - j$ là một phần tử khả nghịch của $End(M)$. Vì u là một đơn cấu cốt yếu nên tồn tại $\overline{j} : E(M) \to E(M)$ với $\overline{j} \circ u = u \circ j$ và $\overline{j} \in \Delta(E(M)) = J(End(E(M)))$. Từ đây suy ra $1 - \overline{j}$ là một phần tử khả nghịch trong $End(E(M))$ và $(1 - \overline{j}) \circ u = u \circ (1 - j)$. Mặt khác, cũng tồn tại $h : E(M) \to E(M)$ là một tự đồng cấu của $E(M)$ với

$$(1 - \overline{j}) \circ h = h \circ (1 - j) = 1_{E(M)}.$$

Từ đó chúng ta có $(1 - \overline{j}) \circ h = h \circ (1 - \overline{j}) = 1_{E(M)}$, suy ra

$$1_{E(M)} - h = -h \circ \overline{j} \in J(End(E(M))).$$

Vậy $1_{E(M)} - h \in J(End(E(M)))$.

Theo giả thiết M là một R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu, do đó tồn tại $\alpha : M \to M$ là một tự đồng cấu của M với $(1_{E(M)} - h) \circ u = u \circ \alpha$. Khi đó ta có

$$u \circ (1 - j) \circ (1 - \alpha) = (1 - \overline{j}) \circ u \circ (1 - \alpha) = (1 - \overline{j}) \circ h \circ u = u.$$

Vì u là đơn cấu nên $(1 - j) \circ (1 - \alpha) = 1_M$. Tương tự chúng ta cũng có $(1 - \alpha) \circ (1 - j) = 1_M$. Vậy $1 - j$ là phần tử khả nghịch của $End(M)$, hay $\Delta(M) \subseteq J(End(M))$.

(2) Lấy $e' + \Delta(M)$ là một lũy đẳng của $End(M)/\Delta(M)$ và

$$f' + J(End(E(M))) = \bar{\Phi}(e' + \Delta(M))$$

với một tự đồng cấu f' của $E(M)$ thõa mãn $f' \circ u = u \circ e'$. Dễ dàng thấy $f' + J(End(E(M)))$ là một lũy đẳng trong $End(E(M))/J(End(E(M)))$. Vì các lũy đẳng là nâng được theo modulo $J(End(E(M)))$, nên tồn tại một lũy đẳng f của $End(E(M))$ mà $f' = f + j$ với j nào đó trong $J(End(E(M)))$. Từ tính chất tựa nội xạ cốt yếu của M chúng ta suy ra tồn tại $e \in End(M)$ mà $j \circ u = u \circ e$, và do đó $f \circ u = u \circ (e' - e)$. Chú ý rằng u là một đơn cấu và $f^2 = f$, do đó

$$u \circ (e' - e) = f \circ u = f \circ (f \circ u) = f \circ (u \circ (e' - e)) = u \circ (e' - e)^2.$$

Điều này chỉ ra rằng $e' - e$ là một lũy đẳng của $End(M)$. Theo cách xác định của đồng cấu vành $\bar{\Phi}$, ta có

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(e' - e + \Delta(M)) &= f' - j + J(End(E(M))) \\ &= f' + J(End(E(M))) = \bar{\Phi}(e' + \Delta(M)).\end{aligned}$$

Vì $\bar{\Phi}$ là một đồng cấu nên

$$e' - e + \Delta(M) = e' + \Delta(M).$$

Vậy mọi lũy đẳng là nâng được theo modulo $\Delta(M)$. □

Năm 1961, trong [24], các tác giả Johnson-Wong đã chỉ ra được mối quan hệ giữa môđun tựa nội xạ và môđun bất biến dưới các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó, đó là, một môđun là tựa nội xạ nếu nó bất biến dưới các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó. Trong định lý dưới đây, chúng tôi cũng chỉ ra được mối quan hệ giữa môđun tựa nội xạ cốt yếu và môđun bất biến dưới các tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó, đồng thời trả lời được một phần câu hỏi: "*Khi nào thì một môđun tựa nội xạ cốt yếu lại là môđun bất biến đẳng cấu?*".

Định lý 2.2.9. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải M với bao nội xạ $u : M \to E(M)$:*

(1) *M là môđun bất biến đẳng cấu.*

(2) *M là môđun tựa nội xạ cốt yếu và $\dfrac{End(M)}{\Delta(M)}$ ổn định với phép nhân bên trái bởi phần tử khả nghịch của $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$.*

Trong trường hợp này, M thỏa mãn tính chất trao đổi.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2). Môđun M là bất biến đẳng cấu nên hiển nhiên M là tựa nội xạ cốt yếu theo Hệ quả 2.2.3. Lấy $g + J(End(E(M)))$ là một phần tử khả nghịch của $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$. Theo giả thiết (1), tồn tại $g' + J(End(E(M))) \in \dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$ mà

$$gg' + J(End(E(M))) = g'g + J(End(E(M))) = 1 + J(End(E(M))).$$

Dễ dàng kiểm tra gg' và $g'g$ là các phần tử khả nghịch của $End(E(M))$. Do đó g là một phần tử khả nghịch của $End(E(M))$. Mặt khác, vì M là bất biến đẳng cấu, nên tồn tại $f : M \to M$ là một tự đồng cấu của M thỏa mãn $g \circ u = u \circ f$. Điều này kéo theo $g + J(End(E(M))) \in Im(\bar{\Phi})$, nghĩa là, $\dfrac{End(M)}{\Delta(M)}$ ổn định với phép nhân bên trái bởi phần tử khả nghịch của $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Giả sử M là một R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu và $\dfrac{End(M)}{\Delta(M)}$ ổn định với phép nhân bên trái bởi phần tử khả nghịch của $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$. Lấy g là một tự đẳng cấu của $E(M)$. Khi đó $g + J(End(E(M)))$ là một phần tử khả nghịch của $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$, và theo (2) thì

$$(g + J(End(E(M))))Im(\bar{\Phi}) \subset Im(\bar{\Phi}).$$

Điều này có nghĩa là $g + J(End(E(M)))$ là một phần tử của $Im(\bar{\Phi})$, ta viết

$$g + J(End(E(M))) = \bar{\Phi}(f + \Delta(M))$$

với $f \in End(M)$. Mặt khác, tồn tại một tự đồng cấu h của $E(M)$ sao cho $h \circ u = u \circ f$, suy ra $g - h \in J(End(E(M)))$. Từ tính chất tựa nội xạ cốt yếu của M, ta có $(g - h) \circ u = u \circ f'$ với $f' \in End(M)$ nào đó. Do vậy,

$$g \circ u = h \circ u + u \circ f' = f \circ u + u \circ f' = u \circ (f + f').$$

$\square$

Năm 1962, Utumi đưa ra định nghĩa về các vành thỏa mãn các điều kiện (C1), (C2), (C3), sau đó, Jeremy, Takeuchi, Mohamed và Bouhy đã mở rộng từ các vành (C1), (C2) và (C3) sang môđun. Chúng tôi nhắc lại một số điều kiện sau đây đối với môđun trước khi đưa ra các khái niệm về môđun (C1), (C2), (C3) và các mở rộng của nó.

Điều kiện (C1): Với mọi môđun con A của M, tồn tại hạng tử trực tiếp B của M thỏa mãn $A \leq^e B$.

Điều kiện (C2): Nếu môđun con A của M đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của M thì nó cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

Điều kiện (C3): Nếu A và B là hai hạng tử trực tiếp của M thỏa mãn $A \cap B = 0$ thì $A \oplus B$ cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

Môđun M được gọi là *liên tục* nếu nó thỏa mãn các điều kiện (C1) và (C2).

Môđun M được gọi là *tựa liên tục* nếu nó thỏa mãn điều kiện (C1) và (C3). Môđun tựa liên tục còn được gọi là môđun π-*nội xạ*.

Đối với vành tự đồng cấu S của môđun liên tục M, tác giả Y.Utumi đã chỉ ra rằng $S/J(S)$ là vành chính quy và liên tục phải. Hơn nữa, S là vành nửa chính quy.

Định lý 2.2.10 ([37, Theorem 1.25]). *Cho M là R-môđun phải liên tục. Khi đó:*

(1) *S là nửa chính quy và $J(S) = \{\alpha \in S \,|\, Ker(\alpha) \leq^e M\}$;*

(2) *$S/J(S)$ là liên tục phải.*

Năm 1964, trong [10], các tác giả Crawley-Jónsson đã đưa ra câu hỏi: "Khi nào thì một môđun thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn cũng sẽ thỏa mãn tính chất trao đổi?". Định lý sau đây của chúng tôi trả lời được một phần câu hỏi này trong trường hợp M là môđun tựa nội xạ cốt yếu.

Định lý 2.2.11. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu M:*

(1) *M là tựa liên tục.*

(2) *$\dfrac{End(M)}{\Delta(M)}$ ổn định với phép nhân bên trái bởi lũy đẳng của $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$.*

Lúc này, nếu M thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn thì M cũng thỏa mãn tính chất trao đổi.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Xét M là một R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu tựa liên tục. Lấy $e' + \Delta(M)$ là một lũy đẳng của $\dfrac{End(M)}{\Delta(M)}$ và

$$f' + J(End(E(M))) = \bar{\Phi}(e' + \Delta(M))$$

với một tự đồng cấu f' của $E(M)$ thõa mãn $f' \circ u = u \circ e'$. Dễ dàng thấy $f' + J(End(E(M)))$ là một lũy đẳng trong $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$. Do môđun M là tựa nội xạ cốt yếu nên tồn tại lũy đẳng e của $End(M)$ thỏa mãn $f' \circ u = u \circ e$, kéo theo $f' + J(End(E(M))) \in Im(\bar{\Phi})$, nghĩa là $\dfrac{End(M)}{\Delta(M)}$ ổn định với phép nhân bên trái bởi lũy đẳng của $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Giả sử M là một R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu và $\dfrac{End(M)}{\Delta(M)}$ ổn định với phép nhân bên trái bởi lũy đẳng của $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$. Theo Định lý 2.2.9 thì M là môđun bất biến đẳng cấu, mà mọi môđun bất biến đẳng cấu là môđun giả nội xạ ([15, Theorem 16]) nên M cũng là môđun giả nội xạ. Ta đã biết rằng môđun giả nội xạ thỏa mãn điều kiện (C2), suy ra M thỏa mãn điều kiện (C3). Mặt khác, do M là tựa nội xạ cốt yếu nên M thỏa mãn điều kiện (C1). Vậy M là môđun tựa liên tục.

Mặt khác, trong [35] các tác giả đã chứng minh rằng đối với một môđun tựa liên tục M, nếu M thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn thì M cũng thỏa mãn tính chất trao đổi. $\square$

Theo ý tưởng của Cartan-Eilenberg, Bass, Matlis, Papp và Kushan về đặc trưng vành Noether phải qua tính chất "tổng trực tiếp của các môđun phải nội xạ là nội xạ", hay "mỗi môđun phải nội xạ là tổng trực tiếp các môđun không phân tích được", ở đây chúng tôi đã dùng các giả thiết yếu hơn để chứng minh được rằng "tổng trực tiếp của các môđun nội xạ cốt yếu là nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi vành $R/Soc(R)$ là vành Noether phải". Định lý được phát biểu cụ thể như sau.

Định lý 2.2.12. *Các điều kiện sau đây tương đương đối với một vành R:*

(1) *R thỏa mãn điều kiện ACC trên các iđêan phải cốt yếu của R (nghĩa là, $R/Soc(R_R)$ là vành Noether phải).*

(2) *Mỗi tổng trực tiếp của các R-môđun phải nội xạ cốt yếu là nội xạ cốt*

yếu.

(3) *Nếu $K_0, K_1, \ldots, K_n, \ldots$ là các môđun phải đơn, thì $\oplus_{\mathbb{N}} E(K_i)$ là nội xạ cốt yếu.*

(4) *$E^{(\mathbb{N})}$ là nội xạ cốt yếu với mọi môđun nội xạ cốt yếu E_R.*

Chứng minh. (2) $\Rightarrow$ (3) và (2) $\Rightarrow$ (4) là rõ ràng.

(1) $\Rightarrow$ (2) Đặt $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$, trong đó mỗi E_i là một R-môđun phải nội xạ cốt yếu, $T \leq R_R$ và $\varphi \ : T \longrightarrow E$ là R-đồng cấu với hạt nhân cốt yếu. Lấy H là một iđêan phải của R sao cho $T \oplus H$ cốt yếu trong R_R. Ta có $Ker(\varphi) \oplus H$ cốt yếu trong R_R, và do đó $R/(Ker(\varphi) \oplus H)$ là Noether. Khi đó

$$(T \oplus H)/(Ker(\varphi) \oplus H) \cong T/Ker(\varphi)$$

là Noether, và vì vậy $Im(\varphi)$ là môđun hữu hạn sinh. Ta có thể viết

$$\varphi \ : T \longrightarrow E_1 = \bigoplus_{i \in I_1} E_i,$$

trong đó I_1 là một tập con hữu hạn của I. Do E_1 là nội xạ cốt yếu theo Bổ đề 2.1.3(4), nên có một đồng cấu $\overline{\varphi} : R \longrightarrow E_1$ là mở rộng của φ, từ đó suy ra $\iota\overline{\varphi} : R \to E$ là mở rộng của φ, trong đó $\iota : E_1 \longrightarrow E$ là ánh xạ bao hàm. Vậy E là môđun nội xạ cốt yếu.

(3) $\Rightarrow$ (1) Xét $I_0 < I_1 < \cdots$ là một dãy tăng ngặt của các iđêan phải cốt yếu của R và đặt $I = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$. Khi đó I là một iđêan phải cốt yếu của R và, với mọi $x \in I$, chúng ta có thể chọn $k_x \geq 1$ sao cho $x \in I_i$ với mọi $i \geq k_x$. Vì vậy, với mỗi $i \geq 1$ ta chọn $a_i \in I \backslash I_i$. Lấy U_i/I_i là một môđun con cực đại của $(a_i R + I_i)/I_i$. Suy ra $A_i = (a_i R + I_i)/U_i$ là một R-môđun phải đơn. Ta xác định $\eta_i : (a_i R + I_i)/I_i \longrightarrow A_i$ bởi $\eta_i(x + I_i) = x + U_i$ và xét ánh xạ bao hàm $\iota_i : A_i \longrightarrow E(A_i)$. Do $E(A_i)$ là nội xạ nên tồn tại một đồng cấu $\varphi_i : I/I_i \longrightarrow E(K_i)$ sao cho $\varphi_i = \iota_i \circ \eta_i$:

$$\begin{tikzcd}
(a_iR+I_i)/I_i \arrow[r, hook] \arrow[d, "\eta_i"'] & I/I_i \arrow[ddl, "\varphi_i"] \\
A_i \arrow[d, "\iota_i"'] & \\
E(A_i) &
\end{tikzcd}$$

Chú ý rằng $\varphi_i(x+I_i)=0$ với mọi $i \geq k_x$, vì vậy chúng ta có thể xác định $\alpha : I \longrightarrow \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} E(A_i)$ bởi $\alpha(x)=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}}\varphi_i(x+I_i)$ với mọi $x\in I$. Với mỗi $x \in I$ mà $x \neq 0$, tồn tại $r\in R$ sao cho $xr \in I_0$ và $xr \neq 0$ (vì I_0 là iđêan phải cốt yếu của R). Điều đó kéo theo $xr \in I_i$ với mọi $i \in \mathbb{N}$, nghĩa là $xr \in Ker(\alpha)$ và $xr \neq 0$. Suy ra α là đồng cấu với hạt nhân cốt yếu. Do $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} E(A_i)$ là nội xạ cốt yếu theo (3) nên α mở rộng được tới $\overline{\alpha} : R \to \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} E(A_i)$.

Đặt $\overline{\alpha}(1)=\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} b_i \in \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} E(A_i)$, khi đó tồn tại $n \geq 0$ sao cho $b_i = 0$ với mọi $i \geq n$. Với bất kỳ $x \in I$, chúng ta có

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x+I_i)=\alpha(x)=\overline{\alpha}(x)=\overline{\alpha}(1)x=\bigoplus_{i=1}^{\infty} b_i x.$$

Khi đó $\varphi_i(x+I_i)=0$ với mọi $i \geq n$ và mọi $x \in I$. Nhưng do $\varphi_n(a_n+I_n)\neq 0$ theo định nghĩa của φ_i nên điều này mâu thuẫn với chứng minh (1).Vậy mọi dãy tăng ngặt các iđêan phải cốt yếu của R thỏa mãn ACC.

(4) $\Rightarrow$ (1) Xét $I_1 \leq I_2 \leq \cdots$ là một dãy iđêan phải cốt yếu của R. Với mỗi i, đặt $E_i = E\left(R/I_i\right)$ và $E=\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. Với mọi $i \geq 1$ chúng ta có

$$\prod_{j=1}^{\infty} E_j = E_i \bigoplus \left(\prod_{j\neq i} E_j\right).$$

Đặt $M_i = \prod\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ với mọi $i \in \mathbb{N}$. Khi đó M_i là nội xạ cốt yếu theo Bổ đề 2.1.3(5). Theo chú ý ở trên, chúng ta có

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i = \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i\right)\bigoplus\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\prod_{j\neq i} E_j\right).$$

Mặt khác, theo giả thiết thì $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$ nội xạ cốt yếu. Dễ dàng kiểm tra rằng E cũng là nội xạ cốt yếu. Do đó đồng cấu với hạt nhân cốt yếu $f : \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \to E$ được xác định bởi $f(t) = (t + I_i)_i$ với mọi $t \in \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ mở rộng được tới $\overline{f} : R \to E$. Xét $n \geq 1$ sao cho $\overline{f}(1) \in \bigoplus_{j=1}^{n} E_j$. Khi đó

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) \leq \bigoplus_{j=1}^{n} E_j$$

Vì vậy, nếu $t \in \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ thì $t \in I_m$ với mọi $m > n$, kéo theo $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = I_{n+1}$ và dãy dừng. $\square$

Từ định lý trên ta có ngay hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.13. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành R:*

(1) *R thỏa mãn điều kiện ACC trên các iđêan phải cốt yếu của R.*

(2) *Mỗi tổng trực tiếp của các R-môđun phải nội xạ là nội xạ cốt yếu.*

Trong Định lý 1.3.9 của Osofsky, vành R là nửa đơn khi và chỉ khi mọi R-môđun phải (trái) xiclic là nội xạ, hay tương đương, mọi R-môđun phải là nửa đơn khi và chỉ khi mọi R-môđun phải (trái) xiclic là nội xạ. Mở rộng kết quả này, chúng tôi chứng minh được rằng mọi R-môđun phải là nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi mọi R-môđun suy biến là nửa đơn.

Định lý 2.2.14. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành R:*

(1) *Mọi R-môđun phải là nội xạ cốt yếu.*

(2) *Mọi R-môđun phải xiclic là nội xạ cốt yếu.*

(3) *Mọi R-môđun suy biến là môđun nửa đơn.*

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Điều này là hiển nhiên.

(2) $\Rightarrow$ (3) Cho A là một môđun con cốt yếu của một môđun phải xiclic mR, lúc này mR/A là môđun suy biến. Bây giờ chúng ta cần chứng minh rằng mR/A là môđun nửa đơn. Để làm được điều đó, chúng ta cần chỉ ra rằng mọi R-môđun phải xiclic là mR/A-nội xạ. Cho N là một mR/A-môđun phải xiclic. Lấy A' là một môđun con của mR mà chứa A và xét đồng cấu $f : A'/A \to N$. Bây giờ, ta xét các phép chiếu chính tắc

$$\pi_1 : A' \to A'/A, \pi_2 : mR \to mR/A$$

và các phép nhúng

$$\iota_1 : A' \to mR, \iota_2 : A'/A \to mR/A.$$

Ta cần chỉ ra rằng $Ker(f\pi_1) \leq^e A'$. Thật vậy, vì $A \leq^e mR$ nên suy ra $A \leq^e A \leq mR$. Xét sơ đồ $A' \to A'/A \to N$. Với mọi $a' \in A', a' \neq 0$, luôn tồn tại $r \in R$ sao cho $0 \neq a'r \in A$ (vì $A \leq^e A'$), từ đó suy ra

$$f\pi_1(a'r) = f(a'r + A) = 0$$

(vì $a'r \in A$), vậy $a'r \in Ker(f\pi_1)$, hay $Ker(f\pi_1) \leq^e A'$.

Theo giả thiết, N là mR-nội xạ cốt yếu nên ta có biểu đồ giao hoán

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "f\pi_1"'] & mR \arrow[dl, dotted, "g"] \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

nghĩa là luôn tồn tại một đồng cấu $g : mR \to N$ thỏa mãn $f \circ \pi_1 = g \circ \iota_1$, suy ra $g(A) = 0$, và do đó tồn tại đồng cấu $g' : mR/A \to N$ sao cho $g = g' \circ \pi_2$. Khi đó ta có

$$f \circ \pi_1 = g \circ \iota_1 = g' \circ \pi_2 \circ \iota_1 = g' \circ \iota_2 \circ \pi_1,$$

suy ra $f = g' \circ \iota_2$. Điều này có nghĩa f mở rộng được thành đồng cấu g'. Vậy N là mR/A-nội xạ. Bây giờ chúng ta áp dụng Hệ quả 1.2.4 và suy ra

mR/A là nửa đơn. Vậy mọi R-môđun suy biến là môđun nửa đơn.
(3) $\Rightarrow$ (1) Cho N là R-môđun phải, A là một môđun con của M và đồng cấu $f : A \to N$ là đồng cấu khác không của các R-môđun với $Ker(f) \leq^e A$, suy ra $A/Ker(f)$ là môđun suy biến, nên theo Hệ quả 1.2.4 thì $A/Ker(f)$ là N-nội xạ. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử A là môđun con cốt yếu của M. Xét các phép chiếu chính tắc

$$\pi_1 : A \to A/Ker(f), \pi_2 : M \to M/Ker(f)$$

và các phép nhúng

$$\iota_1 : A \to M, \iota_2 : A/Ker(f) \to M/Ker(f).$$

Theo giả thiết, tồn tại đồng cấu $f' : A/Ker(f) \to N$ mà $f = f' \circ \pi_1$. Vì

$$Ker(f) \leq^e A \leq^e M$$

nên $M/Ker(f)$ là môđun nửa đơn, do đó tồn tại đồng cấu $g : M/Ker(f) \to N$ thõa mãn $g \circ \iota_2 = f'$. Khi đó

$$f = f' \circ \pi_1 = g \circ \iota_2 \circ pi_1 = (g \circ \pi_2) \circ \iota_1,$$

hay N là M-nội xạ cốt yếu với mọi môđun M, nên N là R-môđun phải nội xạ cốt yếu $\square$

Ví dụ 2.2.15. Cho R là một miền Cozzens và Q là vành thương cổ điển phải của R (xem [9]). Chúng ta xét vành $T = \prod_{i \geq 1} T_i$, trong đó $T_i = Q$ với mỗi i, và xét một vành con của T được xác định như sau:

$$S = \{a = (a_k)_k \in T \mid \exists n \geq 1 : a_i = a_j \in R, \forall i, j > n\}.$$

Ta thấy $Soc(S_S)$ cốt yếu trong S_S. Vì R không là tựa nội xạ phải nên S-môđun phải $S_S/Soc(S_S)$ cũng không nội xạ. Từ đó suy ra có một môđun phải suy biến trên vành R mà không nội xạ. Từ định nghĩa của miền Cozzens, ta suy ra ngay lập tức rằng mọi R-môđun phải nửa đơn suy biến là nội xạ, và nó được xem như tổng trực tiếp của các môđun đơn đẳng cấu từng cặp với nhau.

KẾT LUẬN CỦA CHƯƠNG 2

Trong chương này chúng tôi đã thu được một số kết quả chính sau đây.

1. Trong phần đầu của chương, chúng tôi thu được đặc trưng của môđun N-nội xạ cốt yếu (Bổ đề 2.2.1, Định lý 2.2.2), chúng tôi cũng chứng minh được một môđun là tựa nội xạ cốt yếu nếu nó bất biến dưới các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó với hạt nhân cốt yếu (Hệ quả 2.2.3).

2. Tiếp đó chúng tôi cũng mở rộng được một số tính chất mới của môđun nội xạ cốt yếu từ những tính chất đã biết (Mệnh đề 2.2.4, Mệnh đề 2.2.5, Định lý 2.2.12). Mối quan hệ giữa môđun tựa nội xạ cốt yếu, môđun bất biến đẳng cấu và môđun thỏa mãn tính chất trao đổi cũng cho chúng tôi một số kết quả thú vị (Định lý 2.2.9 và Định lý 2.2.11).

3. Phần cuối của chương chúng tôi thu được Định lý 2.2.14 chỉ ra mối quan hệ giữa môđun nội xạ cốt yếu và môđun suy biến.

Chương 3

Môđun xạ ảnh bé và các vành liên quan

Sau khi nghiên cứu về lớp các môđun nội xạ cốt yếu và môđun bất biến đẳng cấu ở Chương 2, chúng tôi tiếp tục chú ý đến lớp môđun đối ngẫu của chúng, là lớp môđun xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu. Trong chương này chúng tôi chủ yếu trình bày một số tính chất mới của các môđun này và mối liên hệ với những môđun quen thuộc khác. Phần sau của chương đặc trưng các môđun này trên một số vành quen thuộc, như vành tự đồng cấu, V-vành và vành nửa Artin. Phần cuối cùng của chương nghiên cứu về vành mà mọi môđun xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu, gọi là a^*-vành, chúng tôi đưa ra cấu trúc của vành này và đưa ra các kết quả về mối liên hệ giữa lớp vành này với các vành quen thuộc khác. Toàn bộ nội dung của chương này dựa vào các kết quả trong bài báo [1], [30] và [42].

3.1 Môđun xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu

Trước hết, chúng tôi nhắc lại định nghĩa về môđun xạ ảnh bé của các tác giả Clark-Lomp-Vanaja-Wisbauer ([8]).

Định nghĩa 3.1.1. Cho hai R-môđun phải M và N.

(1) M được gọi là N-*xạ ảnh bé* nếu mỗi R-đồng cấu $f : M \to K$ với

$Im(f) \ll K$ và mỗi toàn cấu $p : N \to K$ thì luôn tồn tại một đồng cấu $g : M \to N$ sao cho $p \circ g = f$, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "p"] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(2) M được gọi là *tựa xạ ảnh bé* nếu M là M-xạ ảnh bé.

(3) M được gọi là *xạ ảnh bé* nếu M là N-xạ ảnh bé với mọi môđun N.

Ví dụ 3.1.2. (1) Từ Định nghĩa 3.1.1 ta có, nếu M là môđun xạ ảnh thì M là xạ ảnh bé, và nếu M là tựa xạ ảnh thì M là tựa xạ ảnh bé. Điều ngược lại không đúng trong trường hợp tổng quát.

(2) Môđun nửa đơn là môđun tựa xạ ảnh, nên nó là môđun tựa xạ ảnh bé.

(3) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ là môđun tựa xạ ảnh bé trên vành $\mathbb{Z}$.

Khái niệm môđun đối bất biến đẳng cấu được Singh-Srivastava đưa ra năm 2012 trong [44] như sau.

Định nghĩa 3.1.3. Môđun M được gọi là *đối bất biến đẳng cấu* nếu với mọi môđun con bé K_1 và K_2 của M, thì mọi toàn cấu $\eta : M/K_1 \to M/K_2$ với hạt nhân bé nâng đến một tự đồng cấu φ của M.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ M/K_1 \arrow[r, "\eta"] & M/K_2 \end{tikzcd}$$

Khi xét các môđun trên vành hoàn chỉnh, chúng ta có kết quả sau được chứng minh bởi Singh-Srivastava trong [44].

Mệnh đề 3.1.4 ([44, Proposition 3]). *Cho R là V-vành phải. Khi đó mọi R-môđun phải là môđun đối bất biến đẳng cấu.*

Từ định nghĩa và các kết quả trên, chúng ta xem xét các ví dụ sau.

Ví dụ 3.1.5. (1) $\mathbb{Z}_2$ và $\mathbb{Z}_4$ là các $\mathbb{Z}$-môđun đối bất biến đẳng cấu, nhưng $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ không là $\mathbb{Z}$-môđun đối bất biến đẳng cấu.

(2) $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ là $\mathbb{Z}$-môđun đối bất biến đẳng cấu, nhưng $(2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ không là $\mathbb{Z}$-môđun đối bất biến đẳng cấu.

(3) Môđun không có môđun con bé nào khác không là môđun đối bất biến đẳng cấu. Do đó mọi môđun nửa nguyên thủy là môđun đối bất biến đẳng cấu (môđun M được gọi là *nửa nguyên thủy* nếu $Rad(M) = 0$).

(4) Gọi R là vành cho bởi $\begin{bmatrix} \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & \mathbb{F}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F}_2 \end{bmatrix}$ trong đó $\mathbb{F}_2$ là trường có hai phần tử. Lấy $M = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Nghĩa là $M = e_{11}R$, trong đó e_{11} là một lũy đẳng nguyên thủy. Do R là đại số hữu hạn chiều trên $\mathbb{F}_2$, nên các hàm tử

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(-, \mathbb{F}_2) : \mathrm{Mod} - R \longrightarrow R - \mathrm{Mod}$$

và

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(-, \mathbb{F}_2) : R - \mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{Mod} - R$$

thiết lập tương đương phản biến giữa các phạm trù con của môđun hữu hạn sinh trái và phải trên R. Ngoài ra, vì M là R-môđun phải hữu hạn sinh, nên bao nội xạ $E(M)$ cũng hữu hạn sinh.

Vì vậy, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(E(M), \mathbb{F}_2)$ là phủ xạ ảnh của $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M, \mathbb{F}_2)$. Từ đó, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M, \mathbb{F}_2)$ là R-môđun trái đối bất biến đẳng cấu, nên nó là môđun xạ ảnh bé. Ngoài ra, chú ý rằng $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M, \mathbb{F}_2)$ không bất biến dưới các tự đồng cấu của phủ xạ ảnh $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(E(M), \mathbb{F}_2)$, bởi vì nếu ngược lại thì

$$M \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M, \mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2)$$

sẽ bất biến dưới các tự đồng cấu của

$$E(M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M, \mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2).$$

Vì vậy, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M, \mathbb{F}_2)$ không là tựa xạ ảnh.

Tiếp theo, ta nhắc lại một kết quả của tác giả Singh-Srivastava để phục vụ cho việc chứng minh các kết quả tiếp theo.

Bổ đề 3.1.6 ([44, Theorem 27])**.** *Cho $\pi : P \to M$ là phủ xạ ảnh của môđun M. Khi đó M là đối bất biến đẳng cấu khi và chỉ khi $f(Ker(\pi)) = Ker(\pi)$ với mọi tự đẳng cấu của P.*

Kết quả đầu tiên mang lại cho chúng ta một đặc trưng của các môđun xạ ảnh bé.

Định lý 3.1.7. *Cho R là vành hoàn chỉnh phải và M, N là các R-môđun phải với các phủ xạ ảnh $\pi_1 : P_1 \to M, \pi_2 : P_2 \to N$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(1) *M là N-xạ ảnh bé.*

(2) *Với mỗi R-đồng cấu $f : P_1 \to P_2$ của các R-môđun phải với ảnh bé, thì $f(Ker(\pi_1)) \leq Ker(\pi_2)$.*

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Xét M là R-môđun phải N-xạ ảnh bé. Chúng ta cần chỉ ra rằng các ảnh của $Ker(\pi_1)$ dưới các đồng cấu từ P_1 vào P_2 được chứa trong $Ker(\pi_2)$. Từ tính xạ ảnh bé của các môđun đóng dưới các đẳng cấu, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $N = P_2/Ker(\pi_2)$. Lấy f là một đồng cấu bất kỳ từ P_1 vào P_2 với ảnh bé, $N_0 = Ker(\pi_2) + f(Ker(\pi_1))$ và $\pi : P_2/Ker(\pi_2) \to P_2/N_0$ là phép chiếu chính tắc. Ta có $f(Ker(\pi_1)) \leq N_0$

và do đó tồn tại một đồng cấu $f' : M \to P_2/N_0$ sao cho $\pi \circ \pi_2 \circ f = f' \circ \pi_1$. Khi đó

$$f'(M) = (f' \circ \pi_1)(P_1) = (\pi \circ \pi_2 \circ f)(P_1) \ll P_2/N_0,$$

suy ra $f' = \pi \circ f''$ với đồng cấu $f'' : M \to P_2/Ker(\pi_2)$ nào đó. Vì P_1 xạ ảnh nên tồn tại một đồng cấu $g : P_1 \to P_2$ sao cho $\pi_2 \circ g = f'' \circ \pi_1$. Kết hợp $\pi \circ \pi_2 \circ f = f' \circ \pi_1$ và $\pi \circ \pi_2 \circ g = f' \circ \pi_1$ ta có $(f - g)(P_1)$ được chứa trong N_0. Với mỗi phần tử $p \in P_1$, ta luôn viết được $f(p) - g(p) = f(p_1) + p_2$ với $p_1 \in Ker(\pi_1), p_2 \in Ker(\pi_2)$. Điều đó kéo theo

$$\pi_2(f - g)(p - p_1) = \pi_2(p_2 + g(p_1)) = 0,$$

và vì vậy

$$p \in Ker(\pi_2(f - g)) + Ker(\pi_1).$$

Mặt khác

$$P_1 = Ker(\pi_2(f - g)) + Ker(\pi_1) = Ker(\pi_2(f - g)),$$

suy ra $(f - g)(P_1) \leq Ker(\pi_2)$. Bây giờ sử dụng $g(Ker(\pi_1)) \leq Ker(\pi_2)$ ta thu được

$$f(Ker(\pi_1)) \leq (f - g)(Ker(\pi_1)) + g(Ker(\pi_1)) \leq Ker(\pi_2).$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Chúng ta có thể giả sử $N = P_2/Ker(\pi_2)$. Ta cần chứng minh rằng M là $P_2/Ker(\pi_2)$-xạ ảnh bé. Xét P_0 là môđun con của P_2 chứa $Ker(\pi_2)$ và xét các phép chiếu tự nhiên $\pi : P_2/Ker(\pi_2) \to P_2/P_0$. Từ tính xạ ảnh của P_2, tồn tại sự phân tích $P_2 = P_2' \oplus P_2''$ của P_2 sao cho $\pi \circ \pi_2 \circ \iota : P_2' \to P_2/P_0$ là phủ xạ ảnh của môđun P_2/P_0, trong đó $\iota : P_2' \to P_2$ là phép nhúng. Để chứng minh M là $P_2/Ker(\pi_2)$-xạ ảnh bé, chúng ta cần chỉ ra rằng mọi đồng cấu từ M vào P_2/P_0 với ảnh bé nâng được tới $P_2/Ker(\pi_2)$. Xét $f : M \to P_2/P_0$ là một đồng cấu với ảnh bé. Vì P_1 xạ ảnh nên tồn tại đồng cấu $f' : P_1 \to P_2'$ mà $\pi \circ \pi_2 \circ \iota f' = f \circ \pi_1$. Ta có

$$(\pi \circ \pi_2 \circ \iota f')(P_1) = (f \circ \pi_1)(P_1) = f(M) \ll P_2/P_0$$

và

$$Ker(\pi \circ \pi_2 \circ \iota) \ll P_2',$$

từ đó suy ra $f'(P_1)$ là môđun con bé của P_2. Từ (2) ta có $\pi_2 \circ \iota \circ f' = g \circ \pi_1$ với đồng cấu $g : M \to P_2/Ker(\pi_2)$ nào đó. Khi đó

$$\pi \circ g \circ \pi_1 = \pi \circ \pi_2 \circ \iota \circ f' = f \circ \pi_1,$$

suy ra $g \circ \pi_1 = f$ (vì π_1 là toàn cấu), hay M là N-xạ ảnh bé. $\square$

Khi cho $N = M$, ta thu được ngay hệ quả sau.

Hệ quả 3.1.8. *Cho R là vành hoàn chỉnh phải. Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải M có phủ xạ ảnh $\pi : P \to M$:*

(1) *M là môđun tựa xạ ảnh bé.*

(2) *$Ker(\pi)$ bất biến dưới các tự đồng cấu của P với ảnh bé.*

Nhận xét 3.1.9. (1) Trong toàn bộ các kết quả sau này, chúng tôi xét các môđun trên vành hoàn chỉnh phải. Chú ý rằng nếu X là môđun xạ ảnh trên vành hoàn chỉnh R thì $End(X)/J(End(X))$ là vành chính quy và mỗi phần tử lũy đẳng của nó nâng được modulo $J(End(X))$, đồng thời ta cũng có $\nabla(X) = J(End(X))$.

(2) Xét M và N là các R-môđun phải, chúng tôi ký hiệu

$$\nabla[M, N] = \{f \in Hom(M, N) : Im(f) \ll N\}$$

và

$$\nabla(M) = \{f \in End(M) : Im(f) \ll M\}.$$

Rõ ràng $\nabla(M)$ là một iđêan của $End(M)$.
Giả sử M là R-môđun phải tựa xạ ảnh bé. Cho $p : X \to M$ là một phủ xạ ảnh và $g \in \nabla(X)$. Khi đó tồn tại một đồng cấu $f \in \nabla(M)$ thỏa mãn $f \circ p = p \circ g$. Bởi vì nếu p là toàn cấu bé, thì ánh xạ

$$\theta : \nabla(X) \to \nabla(M)$$

biến $g \mapsto f$ là một toàn cấu nhóm mà hạt nhân gồm các tự đồng cấu $g \in \nabla(X)$ thỏa mãn $p \circ g = p$.

Cho M là R-môđun phải và $p : X \to M$ là phủ xạ ảnh của M. Khi đó ta có đồng cấu vành

$$\Phi : End(M) \to End(X)/J(End(X))$$

được xác định bởi

$$\Phi(f) = \bar{f} + J(End(X)),$$

trong đó $\bar{f} : X \to X$ sao cho $p \circ \bar{f} = f \circ p$.

Rõ ràng, $\nabla(M) = Ker(\Phi)$, nên ta có đồng cấu vành

$$\bar{\Phi} : End(M)/\nabla(M) \to End(X)/J(End(X)).$$

Đồng nhất $End(M)/\nabla(M)$ với $Im(\Phi)$, ta có thể xem rằng $End(M)/\nabla(M)$ là một vành con của $End(X)/J(End(X))$.

Đối ngẫu với Định lý 2.2.8 về vành các tự đồng cấu của môđun tựa nội xạ cốt yếu, chúng tôi cũng đưa ra kết quả tương tự đối với môđun tựa xạ ảnh bé như sau.

Định lý 3.1.10. *Cho M là R-môđun phải tựa xạ ảnh bé với $p : X \to M$ là phủ xạ ảnh trên một vành hoàn chỉnh phải R. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(1) $\nabla(M) \leq J(End(M))$.

(2) *Các phần tử lũy đẳng của $End(M)$ nâng được modulo $\nabla(M)$.*

Chứng minh. (1) Theo giả thiết, ta có $\nabla(X) = J(End(X))$ (Chú ý 3.1.9). Lấy j là một phần tử bất kỳ của $\nabla(M)$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $(1 - j)$ là phần tử khả nghịch của $End(M)$. Vì p là một toàn cấu bé nên tồn tại $\overline{j} : X \to X$ với $p \circ \overline{j} = j \circ p$ và $\overline{j} \in \nabla(X) = J(End(X))$. Từ đây suy ra

$1-\overline{j}$ là một đơn vị của $End(X)$ và $p\circ(1-\overline{j})=(1-j)\circ p$. Mặt khác, luôn tồn tại một tự đồng cấu $h: X\to X$ thỏa mãn

$$h\circ(1-\overline{j})=(1-\overline{j})\circ h=1_X,$$

suy ra $1_X-h=-\overline{j}\circ h\in J(End(X))$. Vậy $1_X-h\in J(End(X))$.

Theo giả thiết, M là một R-môđun phải tựa xạ ảnh bé, do đó tồn tại một tự đồng cấu của $\alpha: M\to M$ với $p\circ(1_X-h)=\alpha\circ p$. Khi đó ta có

$$(1-\alpha)\circ(1-j)\circ p=(1-\alpha)\circ p\circ(1-\overline{j})=(1-\overline{j})\circ p\circ h=p$$

Vì p là toàn cấu nên $(1-\alpha)\circ(1-j)=1_M$. Tương tự chúng ta cũng có $(1-\alpha)\circ(1-j)=1_M$.

(2) Lấy $e'+\nabla(M)$ là một lũy đẳng của $End(M)/\nabla(M)$ và

$$f'+J(End(X))=\bar{\Phi}(e'+\nabla(M))$$

với một tự đồng cấu f' của X thỏa mãn $p\circ f'=e'\circ p$. Dễ dàng thấy $f'+End(X)$ là một lũy đẳng trong $End(X)/J(End(X))$. Vì các lũy đẳng là nâng được theo modulo $J(End(X))$ nên tồn tại một lũy đẳng f của $End(X)$ mà $f'=f+j$ với j nào đó trong $J(End(X))$. Từ tính chất tựa xạ ảnh bé của M chúng ta suy ra tồn tại $e\in End(M)$ mà $p\circ j=e\circ p$, và do đó $p\circ f=(e'-e)\circ p$. Chú ý rằng p là một toàn cấu và $f^2=f$, do đó

$$\begin{aligned}(e'-e)\circ p&=p\circ f=(p\circ f)\circ f\\&=((e'-e)\circ p)\circ f=(e'-e)^2\circ p.\end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng $e'-e$ là một lũy đẳng của $End(M)$. Theo cách xác định của đồng cấu vành $\bar{\Phi}$, ta có

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(e'-e+\nabla(M))&=f'-j+J(End(X))\\&=f'+J(End(X))=\bar{\Phi}(e'+\nabla(M)).\end{aligned}$$

Chúng ta có $\bar{\Phi}$ là một đơn cấu và do đó $e'-e+\nabla(M)=e'+\nabla(M)$, suy ra mọi lũy đẳng là nâng được theo modulo $\nabla(M)$. □

Chúng ta để ý rằng

$$End(M)/\nabla(M) \cong Im(\bar{\Phi}) \leq End(X)/J(End(X)).$$

Định lý tiếp theo chỉ ra mối quan hệ giữa môđun tựa xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu.

Định lý 3.1.11. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải M với một phủ xạ ảnh $p : X \to M$ trên một vành hoàn chỉnh phải R:*

(1) *M là môđun đối bất biến đẳng cấu.*

(2) *M là môđun tựa xạ ảnh bé và $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$.*

Trong trường hợp này, M thỏa mãn tính chất trao đổi.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Rõ ràng, một R-môđun phải đối bất biến đẳng cấu M là tựa xạ ảnh bé. Ta cần chỉ ra rằng $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$. Lấy $g + J(End(X))$ là một phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$. Theo giả thiết, tồn tại

$$g' + J(End(X)) \in End(X)/J(End(X))$$

thỏa mãn

$$gg' + J(End(X)) = g'g + J(End(X)) = 1 + J(End(X)).$$

Dễ dàng kiểm tra gg' và $g'g$ là các phần tử khả nghịch của $End(X)$. Do đó g là một phần tử khả nghịch của $End(X)$. Mặt khác, vì M là đối bất biến đẳng cấu, nên tồn tại $f : M \to M$ là một tự đồng cấu của M thỏa mãn $p \circ g = f \circ p$. Điều này kéo theo $g + J(End(X)) \in Im(\bar{\Phi})$, nghĩa là, $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Giả sử M là một R-môđun phải tựa xạ ảnh bé và $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $\dfrac{End(X)}{J(End(X))}$. Lấy g là một tự đẳng cấu của X. Khi đó $g + J(End(X))$ là một phần tử khả nghịch của $\dfrac{End(X)}{J(End(X))}$, và do đó

$$(g + J(End(X)))Im(\bar{\Phi}) \subset Im(\bar{\Phi})$$

theo (2). Điều này có nghĩa là $g + J(End(X))$ là một phần tử của $Im(\bar{\Phi})$, ta viết $g + J(End(X)) = \bar{\Phi}(f + \Delta(M))$ với f nào đó trong $End(M)$. Mặt khác, tồn tại một tự đồng cấu h của X sao cho $p \circ h = f \circ p$. Suy ra $g - h \in J(End(X))$. Từ tính chất tựa xạ ảnh bé của M, ta có $p \circ (g - h) = f' \circ p$ với $f' \in End(M)$ nào đó. Do vậy,

$$\begin{aligned} p \circ g &= p \circ h + f' \circ p \\ &= p \circ f + f' \circ p = (f + f') \circ p \end{aligned}$$

hay M là môđun đối bất biến đẳng cấu. $\square$

Một R-môđun M được gọi là *rời rạc* nếu M thỏa mãn các điều kiện (D1) và (D2) sau đây.

Điều kiện (D1): Với môđun con bất kỳ N của M tồn tại một hạng tử trực tiếp K của M sao cho $K \leq N$ và $N/K \ll M/K$.

Điều kiện (D2): Nếu N là môđun con của M sao cho M/N đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của M, thì N cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

Môđun M được gọi là *tựa rời rạc* nếu M thỏa mãn điều kiện (D1) và điều kiện (D3) sau:

Điều kiện (D3): Với các hạng tử trực tiếp K và L của M mà $M = K + L$, thì $K \cap L$ cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

Đối ngẫu với Định lý 2.2.11, chúng tôi thu được kết quả sau về môđun rời rạc, đồng thời trả lời một phần câu hỏi của Crawley-Jónsson về môđun thỏa mãn tính chất trao đổi.

Định lý 3.1.12. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải tựa xạ ảnh bé M với $p : X \to M$ là phủ xạ ảnh trên vành hoàn chỉnh phải R:*

(1) *M là môđun tựa rời rạc.*

(2) *$End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các lũy đẳng của* $\dfrac{End(X)}{J(End(X))}$.

Lúc này, nếu M thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn thì M cũng thỏa mãn tính chất trao đổi.

3.2 Đặc trưng môđun nội xạ cốt yếu và xạ ảnh bé trên các vành liên quan

Đầu tiên chúng tôi nhắc lại khái niệm môđun tự sinh. Một R-môđun phải M được gọi là *tự sinh* nếu với mỗi môđun con N của M tồn tại một tập chỉ số $\aleph$ và một toàn cấu $\theta : M^{(\aleph)} \to N$.

Chúng tôi thu được một kết quả liên quan giữa môđun tự sinh và môđun tựa nội xạ cốt yếu trong định lý sau đây.

Định lý 3.2.1. *Cho M là một R-môđun phải tự sinh. Nếu vành tự đồng cấu $End(M)$ của M là vành tựa nội xạ cốt yếu phải thì M là R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu.*

Chứng minh. Ta ký hiệu $S = End(M)$ và lấy $f : A \to M$ là một đồng cấu từ một môđun con A của M vào M với hạt nhân cốt yếu. Chúng ta nhắc lại rằng tập $I = \{g \in S : g(M) \leq A\}$ là một iđêan phải của S. Xét ánh xạ $\phi : I \to S_S$ được xác định bởi $\phi(g) = f \circ g$. Khi đó ϕ một S-đồng cấu hoàn toàn xác định của các S-môđun phải. Rõ ràng f là một đồng cấu với hạt nhân cốt yếu nên ϕ là một S-đồng cấu với hạt nhân cốt yếu. Theo giả thiết, S là tựa nội xạ cốt yếu phải, vì vậy $\phi(g) = \bar{f}g$ với $\bar{f} \in S$ nào đó, suy ra $\bar{f}g = fg$ với mọi $g \in I$. Bây giờ ta còn cần chỉ ra rằng $\bar{f}$ là một mở rộng của f. Thật vậy, với mỗi $a \in A$, tồn tại $u_1, \dots, u_k \in I$ và $m_1, \dots, m_k \in M$ sao cho $a = u_1(m_1) + \cdots + u_k(m_k)$. Khi đó

$$\begin{aligned}\bar{f}(a) &= \bar{f}u_1(m_1) + \bar{f}u_2(m_2) + \cdots + \bar{f}u_k(m_k) \\ &= fu_1(m_1) + fu_2(m_2) + \cdots + fu_k(m_k) \\ &= f(a).\end{aligned}$$

Vậy $\bar{f}$ là một mở rộng của f, hay M là môđun tựa nội xạ cốt yếu. □

Một R-môđun phải M được gọi là *V-môđun* (hay *môđun đối nửa đơn*) nếu mọi môđun con của M là giao của các môđun con cực đại của M. Vành R là *V-vành phải* nếu R_R là V-môđun. Tính chất thường dùng của V-vành đó là nếu R là V-vành phải thì mọi R-môđun phải đơn là nội xạ. Chúng tôi cũng đặc trưng được tính chất V-vành cho $R/Soc(R_R)$ nhưng thông qua môđun nội xạ cốt yếu và môđun xạ ảnh bé.

Trước khi đưa ra kết quả chính của mục này, chúng tôi nhắc lại một kết quả của tác giả Abyzov năm 2018 trong [4] về V-môđun với mục đích sử dụng cho chứng minh của các kết quả tiếp theo.

Bổ đề 3.2.2 ([4, Lemma 2.1])**.** *Các điều kiện sau là tương đương đối với R-môđun phải M:*

(1) *M không là V-môđun.*

(2) *Tồn tại một môđun con N của M sao cho môđun thương M/N là đều, $Soc(M/N)$ là môđun đơn và $M/N \neq Soc(M/N)$.*

Định lý 3.2.3. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành R:*

(1) *$R/Soc(R_R)$ là V-vành phải.*

(2) *Mọi R-môđun phải là xạ ảnh bé.*

(3) *Mọi R-môđun phải hữu hạn sinh là xạ ảnh bé.*

(4) *Mọi R-môđun phải xiclic là xạ ảnh bé.*

(5) *Mọi R-môđun phải nửa đơn là xạ ảnh bé.*

(6) *Mọi R-môđun phải đơn là xạ ảnh bé.*

(7) *Mọi R-môđun phải đơn là nội xạ cốt yếu.*

Chứng minh. (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4), (2) $\Rightarrow$ (5), (4) $\Rightarrow$ (6) và (5) $\Rightarrow$ (6) là hiển nhiên.

(1) $\Rightarrow$ (2) Cho M là một R-môđun phải, chúng ta sẽ chỉ ra rằng M là xạ ảnh bé. Rõ ràng môđun thương $M/Soc(M)$ có thể được xem như môđun trên vành $R/Soc(R_R)$. Bây giờ ta sẽ chứng minh $M/Soc(M)$ là V-môđun. Thật vậy, lấy S là $R/Soc(R_R)$-môđun đơn, vì $R/Soc(R_R)$ là V-vành nên S là $(R/Soc(R_R))$-nội xạ, suy ra S cũng là $(M/Soc(M))$-nội xạ, vậy $M/Soc(M)$ là V-môđun.

Tiếp theo ta sẽ chỉ ra $J(M) \leq Soc(M)$ với mọi môđun M. Thật vậy, lấy $m \in J(M)$ thì

$$m + Soc(M) \in J(M/Soc(M)),$$

hay

$$[m + Soc(M)]R + N/Soc(M) = M/Soc(M)$$

với $N/Soc(M)$ là môđun con của $M/Soc(M)$, suy ra $mR + N = M$. Mặt khác $mR \ll M$ nên theo tính chất môđun con bé ta có $N = M$. Từ đó suy ra

$$[J(M) + Soc(M)]/Soc(M) \leq J(M/Soc(M)),$$

mà $M/Soc(M)$ là V-môđun nên suy ra $J(M/Soc(M) = 0$, điều này kéo theo $J(M) + Soc(M) = Soc(M)$, hay $J(M) \leq Soc(M)$ với mọi môđun M.

Phần còn lại là ta cần chỉ ra rằng M là N-xạ ảnh bé với mọi R-môđun phải N. Xét $f : N \to N_1$ là toàn cấu từ R-môđun phải N vào R-môđun phải N_1, và $g : M \to N_1$ là đồng cấu với ảnh bé. Ta có $g(M)$ là R-môđun phải nửa đơn (vì $g(M) \leq J(N_1) \leq Soc(N_1)$) nên đồng cấu f cảm sinh toàn cấu $f' : N/Soc(N) \to N_1/f(Soc(N))$. Mặt khác, vì $N_1/f(Soc(N))$ là V-môđun, $g(M) \leq f(Soc(N))$ nên tồn tại một đồng cấu $h : M \to N$ thỏa mãn $f \circ h = g$. Vậy M là N-xạ ảnh bé với mọi R-môđun phải N, suy ra M là xạ ảnh bé.

(6) $\Rightarrow$ (1) Giả sử mọi R-môđun phải đơn là xạ ảnh bé, ta cần chỉ ra $R/Soc(R_R)$ là V-vành phải. Giả sử ngược lại, $R/Soc(R_R)$ không là V-vành phải, khi đó theo Bổ đề 3.2.2, R-môđun phải

$$M = (R_R/Soc(R_R))/(I/Soc(R_R))(\cong R/I)$$

sẽ là môđun không đơn, đều và có đế đơn với iđêan phải I của R chứa $Soc(R_R)$. Lấy $\pi : R \to R/I$ là phép chiếu chính tắc và $\iota : Soc(M) \to R/I$ là phép nhúng. Vì $\iota(Soc(M))$ là môđun con bé của R/I theo giả thiết nên tồn tại một đồng cấu $\gamma : Soc(M) \to R$ sao cho $\pi \circ \gamma = \iota$. Ta có

$$\iota(Soc(M)) \neq 0$$

(vì ι là phép nhúng) và mặt khác

$$(\pi \circ \gamma)(Soc(M)) \leq \pi(Soc(R_R)) \leq \pi(I) = 0,$$

điều này mâu thuẫn. Do đó $R/Soc(R_R)$ là V-vành phải.

(1) $\Rightarrow$ (7) Giả sử $R/Soc(R_R)$ là V-vành phải, ta cần chứng minh rằng mọi R-môđun phải đơn là nội xạ cốt yếu, hoặc tương đương, mọi R-môđun phải đơn là R_R-nội xạ cốt yếu. Xét $f : I \to S$ là đồng cấu khác không từ iđêan phải I của R vào một R-môđun phải đơn S với $Ker(f) \leq^e I$. Bây giờ ta cần chứng minh rằng f có thể mở rộng tới R. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử I là iđêan phải cốt yếu của R. Ta xét các phép chiếu chính tắc

$$\pi_1 : I \to I/Soc(R_R), \pi_2 : R \to R/Soc(R_R)$$

và các phép nhúng

$$\iota_1 : I \to R_R, \iota_2 : I/Soc(R_R) \to R/Soc(R_R).$$

Vì $f : I \to S$, $Ker(f) \leq^e I \leq^e R_R$ nên $Ker(f) \leq^e R_R$. Mặt khác, $Soc(R_R)$ là giao của tất cả các iđêan phải cốt yếu của R nên

$$Soc(R_R) \leq Ker(f) \leq^e R_R.$$

Vì thế, $f(Soc(R_R)) = 0$. Khi đó, tồn tại một đồng cấu

$$f' : I/Soc(R_R) \to S = f(I)$$

sao cho $f = f' \circ \pi_1$. Mặt khác chúng ta có

$$f(I)Soc(R_R) = f(ISoc(R_R)) = 0$$

và $R/Soc(R_R)$ là V-vành phải, do đó theo tính chất của V-vành, tồn tại một đồng cấu $g : R/Soc(R_R) \to S = f(I)$ sao cho $g \circ \iota_2 = f'$. Điều này kéo theo

$$f = f' \circ \pi_1 = g \circ \iota_2 \circ \pi_1 = (g \circ \pi_2) \circ \iota_1$$

nên f có thể mở rộng tới R, hay S là môđun nội xạ cốt yếu.

(7) $\Rightarrow$ (1) Giả sử mọi R-môđun phải đơn là môđun nội xạ cốt yếu, ta cần chứng minh $R/Soc(R_R)$ là V-vành phải.

Thật vậy, lấy S là $R/Soc(R_R)$-môđun phải đơn, I là iđêan phải của vành R chứa $Soc(R_R)$, và $f : I/Soc(R_R) \to S$ là đồng cấu của các $R/Soc(R_R)$-môđun phải. Bây giờ ta cần chứng minh rằng S là $R/Soc(R_R)$-nội xạ, hay f có thể mở rộng tới $R/Soc(R_R)$. Xét

$$\pi_1 : I \to I/Soc(R_R), \quad \pi_2 : R \to R/Soc(R_R)$$

và

$$\iota_1 : I \to R_R, \quad \iota_2 : I/Soc(R_R) \to R/Soc(R_R)$$

tương ứng là các phép chiếu chính tắc và các phép nhúng. Khi đó $Ker(f\circ\pi_1)$ là cốt yếu trong I (vì giả sử ngược lại, sẽ tồn tại một môđun đơn $S' \leq I$ mà $(f \circ \pi_1)(S') = 0$, mâu thuẫn với thực tế là $(f \circ \pi_1)(Soc(R_R)) \neq 0$). Từ tính nội xạ cốt yếu của S ta suy ra tồn tại một đồng cấu $g : R \to S$ sao cho $f \circ \pi_1 = g \circ \iota_1$. Khi đó $g(Soc(R_R)) = 0$, và vì vậy tồn tại một đồng cấu $g' : R_R/Soc(R_R) \to S$ thỏa mãn $g = g' \circ \pi_2$. Suy ra

$$f \circ \pi_1 = g \circ \iota_1 = g' \circ \pi_2 \circ \iota_1 = g' \circ \iota_2 \circ \pi_1.$$

Vậy $f = g' \circ \iota_2$ (do π_1 là toàn cấu), từ đây suy ra S là $R/Soc(R_R)$-nội xạ, hay $R/Soc(R_R)$ là V-vành phải. $\square$

Kết quả sau đây đưa ra mối quan hệ giữa môđun nội xạ cốt yếu, môđun xạ ảnh bé, môđun nửa đơn và môđun suy biến trên một vành nửa Artin.

Hệ quả 3.2.4. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành nửa Artin phải R:*

(1) *R không suy biến phải và $R/Soc(R_R)$ là V-vành phải.*

(2) *R không suy biến phải và mọi R-môđun phải (đơn, nửa đơn) là xạ ảnh bé.*

(3) *R không suy biến phải và mọi R-môđun phải đơn là nội xạ cốt yếu.*

(4) *Mọi R-môđun phải đơn, suy biến là nội xạ.*

Chứng minh. (1) $\Leftrightarrow$ (2) và (2) $\Leftrightarrow$ (3) theo Định lý 3.2.3.
(3) $\Rightarrow$ (4) Giả sử R là vành không suy biến phải, mọi R-môđun phải đơn là nội xạ cốt yếu, ta cần chỉ ra rằng mọi R-môđun phải đơn, suy biến là nội xạ. Thật vậy, cho S là R-môđun phải đơn suy biến, I là iđêan của R và $f : I \to S$ là đồng cấu của các R-môđun phải, ta sẽ chứng minh $Ker(f) \leq^e I$. Ta có $I/Ker(f) \cong S$, mà S suy biến nên $I/Ker(f)$ cũng suy biến. Do $Ker(f) \leq I$ nên theo định nghĩa phần bù, luôn tồn tại một iđêan phải A của R sao cho $Ker(f) \oplus A \leq^e I$. Ta có

$$(Ker(f) \oplus A)/Ker(f) \leq I/Ker(f) \cong S,$$

mà S là đơn theo giả thiết nên có hai trường hợp xảy ra.
Trường hợp 1: $Ker(f) \oplus A = Ker(f)$, suy ra $A = 0$, hay $Ker(f) \leq^e I$.
Trường hợp 2: $Ker(f) \oplus A = I$, suy ra $I/Ker(f) \cong A$, mà $I/Ker(f)$ suy biến nên kéo theo A suy biến, suy ra $A = Z(A) = 0$, vậy $Ker(f) = I$, nghĩa là $f(I) = 0$, vô lý.
Tóm lại chúng ta có $Ker(f) \leq^e I$, hay S là môđun nội xạ cốt yếu, nghĩa là đồng cấu f mở rộng được đến đồng cấu $g : R \to S$. Chúng ta kết luận S là nội xạ.

(4) ⇒ (1) Giả sử mọi R-môđun phải đơn suy biến là nội xạ, ta cần chỉ ra rằng R là vành không suy biến phải, và $R/Soc(R_R)$ là V-vành phải. Thật vậy, lấy S là iđêan phải cực tiểu của R, khi đó tồn tại một iđêan phải cực đại I của R và một đẳng cấu $R_R/I \cong S$. Bây giờ giả sử ngược lại, R là vành suy biến phải, không mất tính tổng quát, ta giả sử $I \leq^e R$, suy ra R/I là suy biến, mà $R/I \cong S$ nên kéo theo S suy biến. Từ (4) suy ra S là R-môđun phải nội xạ, do đó S là môt hạng tử trực tiếp của R_R. Vì R_R là xạ ảnh nên S xạ ảnh, kéo theo R/I cũng xạ ảnh. Điều này mâu thuẫn với giả thiết I là môđun con cốt yếu của R_R. Vậy R không suy biến phải. Phần còn lại của (1) tương tự như (7) ⇒ (1) của Định lý 3.2.3. □

3.3 Vành mà mọi môđun xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu

Từ Định lý 3.1.11 về mối liên hệ giữa môđun xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu, trong mục này chúng tôi nghiên cứu về vành mà mọi môđun xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu, tên là a^*-vành.

Trước tiên chúng tôi nhắc lại định nghĩa các vành có liên quan trong mục này. Các khái niệm này được nghiên cứu bởi các tác giả trong [23], [27], [45], [28], [44] và [30].

Định nghĩa 3.3.1. (1) Vành R đươc gọi là *q-vành phải* nếu mọi iđêan phải trên nó là tựa nội xạ.

(2) Vành R được gọi là *q^*-vành phải* nếu mọi R-môđun phải xiclic trên nó là tựa xạ ảnh.

(3) Vành R được gọi là *a-vành phải* nếu mọi iđêan phải trên nó là bất biến đẳng cấu.

(4) Vành R được gọi là *a^*-vành phải* nếu mọi R-môđun phải xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu.

Bốn lớp vành nói trên có mối quan hệ gần gũi với nhau. Chúng ta xét các ví dụ sau.

Ví dụ 3.3.2. (1) Mọi q^*-vành phải và mọi V-vành phải là a^*-vành phải.

(2) Một vành nửa hoàn chỉnh và V-vành phải là q^*-vành phải.

(3) Cho R là vành V-vành phải, di truyền phải, Noether phải và nguyên tố, nhưng không là vành Artin nửa đơn (ví dụ như miền Cozzens's [9]). Theo [14, Proposition 5], mọi môđun tựa xạ ảnh thì vừa xạ ảnh hoặc nội xạ và nửa đơn. Chúng ta suy ra rằng một môđun tựa xạ ảnh thì hoặc là nội xạ, hoặc là xạ ảnh. Bây giờ giả sử R là q^*-vành phải, vì mọi R-môđun phải xiclic là nội xạ hoặc xạ ảnh, chúng ta có sự phân tích vành $R = R_1 \times R_2$, trong đó R_1 là vành Artin nửa đơn và R_2 là miền Öre phải PCI phải theo [22]. Nghĩa là R_2 là vành V-vành phải, miền PCI phải và Noether phải. Theo [17, Proposition 19], mọi R_2-môđun phải xiclic là nửa đơn (hoặc nội xạ), do đó R_2 là Artin nửa đơn, mâu thuẫn. Vậy R là a^*-vành phải nhưng không là q^*-vành phải.

Như chúng tôi đã nhắc lại ở Chương 1 về vành nửa hoàn chỉnh, một vành R được gọi là nửa hoàn chỉnh nếu $R/J(R)$ là nửa đơn Artin và các lũy đẳng nâng được modulo $J(R)$. Tuy nhiên, kết quả mà chúng ta thường sử dụng là, vành R là nửa hoàn chỉnh khi và chỉ khi mọi R-môđun phải (hoặc trái) hữu hạn sinh có phủ xạ ảnh. Một vành R không chứa một tập vô hạn các lũy đẳng trực giao được gọi là vành *I-hữu hạn*, trong trường hợp này

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

trong đó các e_i là các lũy đẳng nguyên thủy, trực giao.

Chúng tôi đưa ra ngay sau đây một liên hệ giữa vành bất biến đẳng cấu và vành nửa hoàn chỉnh.

Bổ đề 3.3.3. *Một vành I-hữu hạn và bất biến đẳng cấu phải là vành nửa hoàn chỉnh.*

Chứng minh. Giả sử R là vành bất biến đẳng cấu phải, khi đó $R/J(R)$ là vành chính quy và các lũy đẳng nâng được modulo $J(R)$. Vì R là vành I-hữu hạn nên $R/J(R)$ cũng là vành I-hữu hạn, do đó $R/J(R)$ không chứa tập vô hạn các lũy đẳng trực giao, do đó $R/J(R)$ là nửa đơn, suy ra R là vành nửa hoàn chỉnh. □

Trong [27], tác giả Koehler đưa ra cấu trúc của vành q^*-vành như sau: Cho R là vành nửa hoàn chỉnh, khi đó R là q^*-vành phải khi và chỉ khi mọi iđêan phải trong căn $J(R)$ của R là iđêan. Chúng tôi cũng đưa ra cấu trúc của a^*-vành trong định lý sau.

Định lý 3.3.4. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành nửa hoàn chỉnh R:*

(1) *R là a^*-vành phải.*

(2) *Mỗi iđêan phải trong $J(R)$ là một T-môđun trái, trong đó T là một vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch của R.*

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Cho I là một iđêan phải của R được chứa trong $J(R)$. Khi đó I là một môđun con bé của R_R, và do đó phép chiếu chính tắc $\pi : R \to R/I$ chính là phủ xạ ảnh. Vì R/I là môđun đối bất biến đẳng cấu nên $u(I) \leq I$ với mọi phần tử khả nghịch u của R. Điều này suy ra I là T-môđun trái, trong đó T là vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch.

(2) $\Rightarrow$ (1) Theo giả thiết, mọi môđun xiclic có phủ xạ ảnh. Lấy I là một iđêan phải của R và $p : P \to R/I$ là phủ xạ ảnh. Rõ ràng P là một hạng tử trực tiếp của R_R, hay $Ker(p)$ là một iđêan phải được chứa trong $J(R)$. Do đó $u(Ker(p)) \leq Ker(p)$ với mọi phần tử khả nghịch u của R. Điều này kéo theo $Ker(p)$ bất biến dưới các tự đẳng cấu của P, suy ra R/I là môđun đối bất biến đẳng cấu, hay R là a^*-vành phải. □

Nhận xét 3.3.5. Trong [27], tác giả chứng minh rằng q^*-vành phải và q^*-vành trái là không trùng nhau trong trường hợp tổng quát. Ví dụ (xem [27, Example 3.8]) lấy

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{c} \end{pmatrix} : \quad \bar{a} \in \mathbb{Z}_4;\ \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

là q^*-vành phải nửa hoàn chỉnh nhưng không là q^*-vành trái.

Tuy nhiên, trong trường hợp này R lại là a^*-vành trái và phải. Thật vậy, theo Ví dụ 3.3.2, R là a^*-vành phải. Ngoài ra, ta có căn Jacobson và tập các phần tử đơn vị của R là

$$J(R) = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \right\}$$

và

$$U(R) = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Chúng ta kiểm tra được rằng $x_1U(R) = \{x_1\}$, $x_2U(R) = \{x_2\}$, và $x_3U(R) = \{x_3\}$, do đó R là a^*-vành trái theo Định lý 3.3.4.

Chúng tôi nhắc lại rằng môđun M được gọi là *môđun hổng* nếu mọi môđun con thực sự của M bé trong M, và M là *môđun địa phương* nếu M là hổng và có duy nhất một môđun con cực đại. Vành R được gọi là *vành địa phương* nếu R/J là một thể, hay tương đương, nếu R có duy nhất một iđêan phải (trái) cực đại. Lũy đẳng e của vành R được gọi là *lũy đẳng địa phương* nếu eRe là vành địa phương.

Một đặc trưng khác của vành nửa hoàn chỉnh được Bass đưa ra trong [7] như sau: Nếu vành R là nửa hoàn chỉnh thì $R = e_1R + e_2R + \cdots + e_nR$, trong đó $e_1, e_2, ..., e_n$ là các lũy đẳng trực giao không phân tích được, $e_iR/e_iJ(R)$ đơn và $e_iJ(R)$ là iđêan phải cực đại duy nhất trong e_iR.

Kết quả tiếp theo cho chúng ta một sự phân tích của a^*-vành.

Định lý 3.3.6. *Cho R là a^*-vành phải bất biến đẳng cấu phải nửa hoàn chỉnh. Khi đó, ta có phân tích $R = S \oplus T$, trong đó*

(1) *S là vành Artin nửa đơn;*

(2) $T = e_1R \oplus e_2R \oplus \cdots \oplus e_nR$ *với* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *là các lũy đẳng địa phương trực giao, và* $e_iR \ncong e_jR$ *với mọi* $i \neq j$.

Chứng minh. Vì R là vành nửa hoàn chỉnh nên tồn tại các lũy đẳng địa phương trực giao $e_1, e_2, \ldots, e_n$ của R sao cho

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_k + e_{k+1} + \cdots + e_n,$$

trong đó mỗi e_iR là đơn nếu $1 \leq i \leq k$, và mỗi e_jR không đơn nếu $k+1 \leq j \leq n$. Trước hết, ta sẽ chỉ ra rằng

$$Hom(e_iR, e_jR) = 0 = Hom(e_jR, e_iR)$$

với mọi $1 \leq i \leq k$ và $k+1 \leq j \leq n$. Thật vậy, giả sử ngược lại $Hom(e_iR, e_jR) \neq 0 \neq Hom(e_jR, e_iR)$, ta xét các đồng cấu khác không $f : e_iR \to e_jR$ và $g : e_uR \to e_vR$ với $1 \leq i, v \leq k$; $k+1 \leq j, u \leq n$. Do e_iR và e_vR là các môđun xạ ảnh đơn nên ta có $e_iR \cong f(e_iR)$ và $Ker(g)$ là một hạng tử trực tiếp của e_uR. Nhưng do e_uR là môđun không phân tích được và g khác không nên mâu thuẫn với $Ker(g)$ là hạng tử trực tiếp của e_uR. Mặt khác, R là vành bất biến đẳng cấu phải nên R_R là môđun bất biến đẳng cấu, theo [15, Theorem 16] suy ra R_R là giả nội xạ, mà mọi môđun giả nội xạ thì thỏa mãn điều kiện (C2) (theo [12, Theorem 2.6]) nên chúng ta có R là vành (C2), kéo theo $f(e_iR)$ là một hạng tử trực tiếp của e_jR, mâu thuẫn với giả thiết rằng mỗi e_jR là môđun không nửa đơn và không phân tích được. Vậy

$$Hom(e_iR, e_jR) = e_jRe_i.$$

Từ đó, đặt

$$S := e_1R \oplus e_2R \oplus \ldots \oplus e_kR$$

và

$$T := e_{k+1}R \oplus e_{k+2}R \oplus \ldots \oplus e_nR$$

là các iđêan của R, S là vành Artin nửa đơn, ta thu được $R = S \oplus T$.

Tiếp theo chúng tôi sẽ chỉ ra $e_iR \ncong e_jR$ với mọi $i \neq j$ và $i, j > k$. Giả sử ngược lại, $\varphi : e_iR \to e_jR$ là một đẳng cấu với $i \neq j$, $i, j > k$. Xét đẳng cấu $\bar{\varphi} : R_R \to R_R$ được cho bởi

$$\begin{array}{lll} \bar{\varphi}|_{e_iR} = \varphi & : e_iR & \to \; e_jR \\ \bar{\varphi}|_{e_jR} = \varphi^{-1} & : e_jR & \to \; e_iR \\ \bar{\varphi}|_{e_lR} = 1_{e_lR} & : e_lR & \to \; e_lR, \; \forall\, l \neq i, \; l \neq j. \end{array}$$

Rõ ràng $\bar{\varphi}(1) = \sum\limits_{l=1}^{n} \bar{\varphi}(e_l)$ là một đơn vị của R và $e_ue_v = 0$ với mọi $u \neq v$. Vì R là a^*-vành phải nên chúng ta có $\bar{\varphi}(1)e_iJ(R) \leq e_iJ(R)$. Khi đó

$$\bar{\varphi}(1)e_iJ(R) = \bar{\varphi}(e_i)e_iJ(R) = \varphi(e_iJ(R)) \leq e_iJ(R).$$

Cuối cùng ta thấy $\varphi(e_iJ(R)) \leq e_iJ(R) \cap e_j(R) = 0$ hay $e_iJ(R) = 0$, mâu thuẫn. Vậy $e_iR \ncong e_jR$. □

Chú ý rằng một vành nguyên tố và a^*-vành chưa chắc là vành Artin đơn, kể cả bổ sung thêm điều kiện vành là nửa hoàn chỉnh (nghĩa là, một vành địa phương là miền nguyên). Chúng tôi chứng minh được trong kết quả kế tiếp rằng nếu R là vành nguyên tố a^*-vành nửa hoàn chỉnh, thì nó hoặc là vành Artin đơn, hoặc là vành địa phương.

Định lý 3.3.7. *Nếu R là vành nguyên tố a^*-vành phải nửa hoàn chỉnh, thì R hoặc là vành Artin đơn, hoặc là vành địa phương.*

Chứng minh. Vì R là vành nửa hoàn chỉnh nên ta phân tích được $R = e_1R + e_2R + ... + e_nR$, trong đó $e_1, e_2, ..., e_n$ là các lũy đẳng trực giao, khác không và không phân tích được. Nếu $n = 1$ thì R là vành địa phương vì $e_1J(R)$ là iđêan phải cực đại duy nhất của e_1R. Nếu $n > 1$ thì theo chứng minh của Định lý 3.3.6 ta có

$$e_iJ(R).e_jJ(R) \leq e_iJ(R) \cap e_jJ(R) = 0,$$

do đó $e_iJ(R) = 0$ với tất cả hoặc ít nhất một i, giả sử tại $i = k$, vì R là vành nguyên tố. Từ $e_iRe_k = 0$ (do R nguyên tố), tồn tại một toàn cấu từ

e_iR vào e_kR, khi đó $e_iR \cong e_kR$ với $i = 1, ..., n$ vì e_iR là đơn và xạ ảnh, còn e_kR là không phân tích được. Vậy R là vành Artin đơn nếu $n > 1$. $\square$

Ví dụ 3.3.8. Xét vành R trong Ví dụ 3.3.2.3, rõ ràng $\mathbb{M}_n(R)$ là a^*-vành phải với mọi $n > 1$, nhưng R không là vành Artin nửa đơn.

Vậy khi nào thì một a^*-vành phải là vành Artin nửa đơn? Chúng tôi trả lời câu hỏi này trong định lý sau.

Định lý 3.3.9. *Các khẳng định sau là tương đương đối với một vành R:*

(1) *R là vành Artin nửa đơn.*

(2) *R là vành nửa hoàn chỉnh và $\mathbb{M}_n(R)$ là a^*-vành phải với mọi $n > 1$.*

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Điều này là hiển nhiên

(2) $\Rightarrow$ (1) Đầu tiên chúng ta chú ý rằng R là vành nửa hoàn chỉnh, nên $\mathbb{M}_n(R)$ cũng là vành nửa hoàn chỉnh. Vì $\mathbb{M}_n(R)$ là a^*-vành phải, mỗi iđêan phải trong $J(\mathbb{M}_n(R))$ là một T-môđun trái, trong đó T là một vành con của $\mathbb{M}_n(R)$ được sinh bởi các phần tử khả nghịch. Chúng ta cần chỉ ra rằng $J(R) = 0$. Thật vậy, giả sử ngược lại là $J(R)$ khác không, ta lấy $x_0 \in J(R)$ mà $x_0 \neq 0$. Khi đó ta có một iđêan phải I của $\mathbb{M}_n(R)$ trong $J(\mathbb{M}_n(R))$ như sau

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_0 \end{pmatrix} \mathbb{M}_n(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_0R & x_0R & x_0R & \cdots & x_0R & x_0R \end{pmatrix}.$$

Xét phần tử khả nghịch $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ của $\mathbb{M}_n(R)$. Khi đó

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin I.$$

Điều này mâu thuẫn với Định lý 3.3.4. Vậy $J(R) = 0$, hay R là vành Artin nửa đơn. □

Định lý sau đây của chúng tôi đóng vai trò chính trong chứng minh các kết quả tiếp theo của chương.

Định lý 3.3.10. *Cho vành R là a^*-vành phải nửa hoàn chỉnh. Khi đó mọi iđêan phải cốt yếu là bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R.*

Chứng minh. Lấy I là một iđêan phải cốt yếu của R và $p : P \to R/I$ là phủ xạ ảnh với P là môđun xạ ảnh. Khi đó tồn tại một toàn cấu chẻ ra $f : R \to P$, nghĩa là có một đồng cấu $f' : P \to R$ sao cho $f \circ f' = 1_P$. Do đó R có một sự phân tích $R = e_1R \oplus e_2R$ với các lũy đẳng e_1, e_2 của R, và $e_1R = Im(f')$, $e_2R = Ker(f)$. Rõ ràng,

$$I = e_2R \oplus (e_1R \cap I)$$

và

$$f'(Ker(p)) = e_1R \cap I,$$

do đó $e_1R \cap I \ll R_R$. Vì R là a^*-vành phải nên ta có $e_1R \cap I$ bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R. Lấy u là một phần tử khả nghịch tùy ý của

R, chúng ra sẽ chỉ ra rằng $u(e_2R) \leq I$. Thật vậy, viết $u = e_1r_1 + e_2r_2$ với $r_1, r_2 \in R$. Vì R là a^*-vành phải nên ta có

$$u(e_2J(R)) \leq e_2J(R)$$

hoặc

$$(e_1r_1 + e_2r_2)(e_2J(R)) \leq e_2J(R).$$

Suy ra $e_1r_1e_2J(R) = 0$ hoặc $(e_1r_1e_2R)J(R) = 0$. Mặt khác, vì R là vành nửa hoàn chỉnh và I cốt yếu trong R_R, chúng ta suy ra

$$e_1r_1e_2R \leq l_R(J(R)) = Soc(R_R) \leq I.$$

Điều này kéo theo

$$u(e_2R) = (e_1r_1 + e_2r_2)(e_2R) \leq e_1r_1e_2R + e_2r_2e_2R \leq I.$$

Như vậy I là bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R. $\square$

Từ Định lý 3.3.10, chúng tôi thu được các kết quả về mối liên hệ giữa a-vành và a^*-vành trong hệ quả sau.

Hệ quả 3.3.11. *Cho R là a^*-vành phải nửa hoàn chỉnh. Nếu R là vành bất biến đẳng cấu phải thì R là a-vành phải.*

Chứng minh. Theo Định lý 3.3.10, vì R là a^*-vành phải nửa hoàn chỉnh nên mọi iđêan phải cốt yếu đều bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R. Hơn nữa R là vành bất biến đẳng cấu phải nên mọi iđêan phải cốt yếu của R đều là bất biến đẳng cấu. Theo [28, Proposition 3.1] ta suy ra R là a-vành phải. $\square$

Từ Nhận xét 3.3.5, một câu hỏi đặt ra rất tự nhiên, đó là, vành a^*-vành phải và trái có trùng nhau không? Ví dụ tiếp theo của chúng tôi sẽ cho thấy câu trả lời là không.

Ví dụ 3.3.12. (Ví dụ Björk) Cho $\mathbb{F}$ là trường và giả sử $\varphi : \mathbb{F} \to \bar{\mathbb{F}} \subseteq \mathbb{F}$ là đẳng cấu được xác định bởi $a \mapsto \overline{a}$, trong đó trường con $\bar{\mathbb{F}} \neq \mathbb{F}$. Đặt R ký hiệu cho không gian véc tơ trái có cơ sở là $\{1, t\}$, và cho R vào một $\mathbb{F}$-đại số theo cách xác định $t^2 = 0$ và $ta = \varphi(a)t$ với mọi $a \in F$ (xem [37, Example 2.5]). Chú ý rằng lúc này R là vành Artin trái và $J(R) = Rt = \mathbb{F}t$ là iđêan trái thực sự duy nhất của R. Rõ ràng R là a^*-vành trái. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng R không là a^*-vành phải. Thật vậy, lấy $d \in \mathbb{F}$ với $d \notin \bar{\mathbb{F}}$. Khi đó d là một phần tử khả nghịch của R. Ta đã biết rằng $\bar{\mathbb{F}}t$ là iđêan phải bé trong $J(R)$. Giả sử $d(\bar{\mathbb{F}}t) \leq \bar{\mathbb{F}}t$, khi đó tồn tại phần tử $x_0 \in \bar{\mathbb{F}}$ sao cho $dt = x_0 t$, suy ra $d = x_0 \in \bar{\mathbb{F}}$, mâu thuẫn. Vậy $\bar{\mathbb{F}}t$ không là T-môđun trái, với T là vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch, hay R không là a^*-vành phải.

Trong Định lý 3.3.10, xét trên vành R nửa hoàn chỉnh, nếu R là a^*-vành phải thì mọi iđêan phải cốt yếu đều bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R. Bổ đề dưới đây của chúng tôi trả lời câu hỏi ngược lại, nếu R là vành nửa hoàn chỉnh và mọi iđêan phải cốt yếu đều bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R thì R có là a^*-vành phải hay không?

Bổ đề 3.3.13. *Giả sử R là vành nửa hoàn chỉnh và mọi iđêan phải cốt yếu đều bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R. Nếu mọi iđêan trái chính bé là linh hóa tử trái thì R là a^*-vành trái.*

Chứng minh. Giả sử mọi iđêan trái chính bé là linh hóa tử trái, khi đó $J(R) \leq Z(R_R)$ theo [46, Proposition 2.6]. Lấy I là một iđêan trái được chứa trong $J(R)$. Với mỗi $a \in I$ ta có $r(a) \leq^e R_R$ và $lr(a) = Ra$. Vì mỗi iđêan phải cốt yếu là bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R, ta có $lr(a)u \leq lr(a)$ với phần tử khả nghịch u của R, hay tương đương, $(Ra)u \leq Ra$ với mỗi phần tử khả nghịch u của R. Từ đó suy ra I là một T-môđun phải, với T là vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch, hay R là a^*-vành trái. □

Như chúng tôi đã chỉ ra trong Ví dụ 3.3.12, trong trường hợp tổng quát thì a^*-vành trái và a^*-vành phải không trùng nhau, tuy nhiên trong định lý sau chúng tôi chỉ ra được lúc nào thì hai lớp vành trên là trùng nhau.

Định lý 3.3.14. *Giả sử R là vành nửa hoàn chỉnh và mọi iđêan trái chính bé là linh hóa tử trái. Lúc này nếu R là a^*-vành phải thì R cũng là a^*-vành trái.*

Chứng minh. Giả sử R là a^*-vành phải nửa hoàn chỉnh, khi đó mọi iđêan phải cốt yếu là bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R theo Định lý 3.3.10. Mặt khác, vì mọi iđêan trái chính bé là linh hóa tử trái nên R là a^*-vành trái theo Bổ đề 3.3.13. □

Từ các định lý trên ta có ngay hệ quả sau.

Hệ quả 3.3.15. *Nếu R là vành nửa hoàn chỉnh và mọi iđêan trái (phải, tương ứng) chính bé là linh hóa tử trái (phải, tương ứng) thì các khẳng định sau là tương đương:*

(1) *R là a^*-vành phải.*

(2) *Mọi iđêan phải cốt yếu là bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R.*

(3) *R là a^*-vành trái.*

(4) *Mọi iđêan trái cốt yếu là bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R.*

Chúng ta nhắc lại khái niệm môđun đối sinh như sau, một môđun M được gọi là *đối sinh* nếu với mỗi môđun N và $0 \neq x \in N$ đều tồn tại đồng cấu $g \in Hom(N, M)$ sao cho $g(x) \neq 0$. Vành R được gọi là *vành đối sinh phải* nếu R_R là môđun đối sinh.

Định lý cuối cùng trong chương này của chúng tôi dùng để chỉ ra quan hệ giữa vành đối sinh và a^*-vành. Định lý được phát biểu như sau.

Định lý 3.3.16. *Nếu R là vành CS phải, đối sinh phải và a-vành phải thì R là a^*-vành phải và trái.*

Chứng minh. Theo giả thiết ta có R là vành tựa nội xạ, nửa hoàn chỉnh, và mọi iđêan phải chính bé là linh hóa tử phải. Hơn nữa, vì R là a-vành phải nên mọi iđêan phải cốt yếu là bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R. Theo Bổ đề 3.3.13 thì R là a^*-vành trái, đồng thời R là a^*-vành phải theo Hệ quả 3.3.15. □

KẾT LUẬN CỦA CHƯƠNG 3

Trong chương này chúng tôi đã thu được các kết quả chính sau đây.

1. Trong phần đầu của chương chúng tôi thu được đặc trưng của môđun N-xạ ảnh bé thông qua đồng cấu môđun trên các hạt nhân của các phủ xạ ảnh (Định lý 3.1.7), và có được kết quả tương tự cho môđun tựa xạ ảnh bé ở Hệ quả 3.1.8.

2. Trong phần tiếp theo chúng tôi giới thiệu các kết quả của môđun đối bất biến đẳng cấu. Mối quan hệ giữa môđun tựa xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu được giải quyết trong Định lý 3.1.11, kết quả về môđun thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn cũng sẽ thỏa mãn tính chất trao đổi được chúng tôi đưa ra trong Định lý 3.1.12. Các đặc trưng của V-vành và vành nửa Artin thông qua môđun nội xạ cốt yếu và môđun xạ ảnh bé lần lượt được trình bày trong Định lý 3.2.3 và Hệ quả 3.2.4.

3. Trong mục 3.3 về vành mà mọi môđun xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu chúng tôi đã thu được các kết quả chính như sau. Chúng tôi mô tả được cấu trúc của a^*-vành bằng Định lý 3.3.4 như sau, một vành nửa hoàn chỉnh R là a^*-vành khi và chỉ khi mỗi iđêan phải trong $J(R)$ là một T-môđun trái, với T là vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch. Định lý 3.3.6 cho chúng tôi sự phân tích của a^*-vành. Vì một vành nguyên tố a^*-vành chưa chắc là vành Artin đơn, nên chúng tôi đưa ra Định lý 3.3.7 để khẳng định rằng một vành nguyên tố, a^*-vành nửa hoàn chỉnh sẽ hoặc là vành Artin đơn hoặc là vành địa phương. Chúng tôi cũng trả lời cho câu hỏi khi nào thì vành a^*-vành là vành Artin nửa đơn trong Định lý 3.3.9. Định lý 3.3.14 nói rằng nếu cho R là vành hoàn chỉnh thỏa mãn mọi iđêan trái chính bé là các linh hóa tử trái, lúc này nếu R là a^*-vành phải thì R cũng là a^*-vành trái.

4. Phần còn lại của chương chúng tôi đưa ra các kết quả về mối quan hệ giữa các lớp vành, cụ thể, quan hệ giữa a-vành phải và a^*-vành phải được giới thiệu trong Hệ quả 3.3.11, Định lý 3.3.16; quan hệ giữa vành nửa hoàn chỉnh và a^*-vành được nêu trong Bổ đề 3.3.13.

KẾT LUẬN

Trong luận án này, chúng tôi đã thu được những kết quả chính sau đây.

1. Từ việc nghiên cứu về môđun nội xạ cốt yếu, chúng tôi đã đưa ra được một số đặc trưng của môđun nội xạ cốt yếu (Định lý 2.2.2, Mệnh đề 2.2.4 và Mệnh đề 2.2.5). Ngoài ra, chúng tôi cũng đã thu được một số kết quả về quan hệ giữa môđun nội xạ cốt yếu và môđun bất biến đẳng cấu, tiêu biểu là Định lý 2.2.9. Chúng tôi cũng đã trả lời được một phần cho câu hỏi mà Crawley-Jónsson nêu ra về môđun thỏa mãn tính chất trao đổi trong trường hợp M là môđun nội xạ cốt yếu (Định lý 2.2.11) và khi M là môđun xạ ảnh bé (Định lý 3.1.12).

2. Chúng ta thường nhắc đến một trong những đặc trưng quan trọng của vành Noether phải, đó là, trên vành Noether phải thì tổng trực tiếp của các môđun nội xạ là nội xạ. Định lý 2.2.12 cho chúng tôi một kết quả tương tự đối với môđun nội xạ cốt yếu, đó là, nếu vành $R/Soc(R)$ là vành Noether phải thì tổng trực tiếp của mọi R-môđun phải nội xạ cốt yếu là nội xạ cốt yếu. Một kết quả nổi bật khác trong mục này là Định lý 2.2.14, chúng tôi đã mở rộng Định lý Osofsky cho môđun nội xạ cốt yếu.

3. Khi nghiên cứu lớp vành mà mọi môđun xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu, chúng tôi đã giải quyết được gần như trọn vẹn câu hỏi mà Singh-Srivastava đưa ra, đó là mô tả và đặc trưng lớp a^*-vành. Chúng tôi đã đưa ra được cấu trúc của a^*-vành ở Định lý 3.3.4. Sự phân tích của nó cũng được giới thiệu trong Định lý 3.3.6. Các kết quả và ví dụ để phân biệt các lớp vành có liên quan cũng được chúng tôi chú trọng và chứng minh chi tiết.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Nguyễn Thị Thu Hà, *Các đặc trưng của môđun xạ ảnh bé*, Tạp chí khoa học, Đại học Huế (nhận đăng tháng 5-2020).

2. Kosan, T. M., Ha, N. T. T., Quynh, T. C., *Rings for which every cyclic module is dual automorphism-invariant*, J. Algebra and its Appl., **15** (5), (2016), 11pp.

3. Quynh, T. C., Abyzov, A. N., Ha, N. T. T., Yildirim, T., *Modules close to the automorphism-invariant and coinvariant*, J. Algebra and its Appl., **18** (12), (2019), 24pp.

CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO VÀ THẢO LUẬN TẠI:

1. *Hội thảo về nhóm, vành và các vấn đề liên quan*, Viện nghiên cứu cao cấp về toán (VIASM), Hà Nội, 30/5/2014.

2. *Xêmina tại Khoa Đại số và Logic Toán*, Viện Toán-Cơ Lobachevsky, Trường Đại học Kazan, Liên bang Nga.

3. *Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ IX*, Trường Sỹ quan thông tin Nha Trang, Khánh Hòa, 14-18/8/2018.

4. *Xêmina tại Tổ bộ môn Đại số-Hình học*, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm-Đại học Huế.

5. *Hội thảo về mã đại số và các vấn đề liên quan*, Viện nghiên cứu cao cấp về toán (VIASM), Hà Nội, 25-27/12/2019.

Tài liệu tham khảo

TÀI LIỆU TIẾNG VIỆT

[1] Nguyễn Thị Thu Hà, *Các đặc trưng của môđun xạ ảnh bé*, Tạp chí khoa học, Đại học Huế (nhận đăng tháng 5-2020).

[2] Nguyễn Tiến Quang, Nguyễn Duy Thuận, *Cơ sở lý thuyết môđun và vành*, Nhà xuất bản Giáo dục, (2001).

[3] Trương Công Quỳnh, Lê Văn Thuyết, *Giáo trình Lý thuyết vành và môđun* , Nhà xuất bản Đại học Huế, (2013).

TÀI LIỆU TIẾNG ANH

[4] Abyzov, A. N., *Almost Projective and Almost Injective Modules*, Mathematical Notes **103**, (2018), 3-17.

[5] Anderson, F. W., Fuller, K. R., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, (1974).

[6] Birkenmeier, G. F., Park, J. K., Rizvi, S. T., *Extensions of Rings and Modules*, Birkhauser, New York, (2013).

[7] Bass, H., *Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **95**, (1960), 466-488.

[8] Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., Wisbauer, R., *Lifting Modules: Supplements and projectivity in module theory*, Frontiers in Mathematics, Birkhauser Verlag, Basel, (2006).

[9] Cozzens, J. H., *Homological properties of the ring of differential polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc., **76**, (1970), 75-79.

[10] Crawley, P., Jónsson, B., *Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems*, Pacific J. Math., **14** (3), (1964), 755-1127.

[11] Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith, P. F., Wisbauer, R., *Extending modules*, Pitman Research Notes in Math, Longman, Harlow, New York, (1994).

[12] Dinh, H. Q., *A note on pseudo-injective modules*, Comm. Algebra, **33** (2), (2005), 361-369.

[13] Dickson, S. E., Fuller, K. R., *Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope*, Pacific Journal of Mathematics, **31**, (1969), 655-658.

[14] Dinh, H. Q., Holston, C. J., Huynh, D. V., *Quasi-projective modules over prime hereditary Noetherian V-rings are projective or injective*, J. Algebra, **360**, (2012), 87-91.

[15] Er, N., Singh, S., Srivastava, A. K., *Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls*, J. Algebra, **379**, (2013), 223-229.

[16] Faith, C., *Lectures on injective modules and quotient rings*, Springer LNM, **49**, (1967).

[17] Fuchs, L., *On quasi-injective modules*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa., **23**, (1969), 541-546.

[18] Goodearl, K. R., *Von Neumann regular rings*, Pitman London, (1979).

[19] K. R. Goodearl, K. R., Warfield Jr., R. B., *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[20] Guil Asensio, P. A., Tutuncu, D. K., Srivastava, A. K., *Modules invariant under automorphisms of their covers and envelopes*, Israel J. Math., **206**, (2015), 457-482.

[21] Guil Asensio, P. A., Tutucu, D. K., Kalebogaz, B., Srivastava, A. K., *Modules which are coinvariant under automorphisms of their projective covers*, Journal of Algebra, **466**, (2016), 147-152.

[22] Geol, S. C., Jain, S. K., Singh, S., *Rings whose cyclic modules are injective or projective*, Proc. Amer. Math. Soc., **53** (1), (1975), 16-18.

[23] Jain, S. K., Mohamed, S., Singh, S., *Rings in which every right ideal is quasi-injective*, Pacific J. Math., **31**, (1969), 73-79.

[24] Johnson, R. E., Wong, E. T., *Quasi-injective modules and irreducible rings*, J. London Math. Soc., **36** (1961), 260-268.

[25] Harada, M., *Factor categories with applications to direct decomposition of modules*, Lecture Notes in Pure and Applied Math., **88**, Marcel Dekker, New York, 1983.

[26] Kasch, F., *Modules and Rings*, L.M.S. Monograph No. **17**, Academic Press, New York, (1982).

[27] Koehler, A., *Rings for which every cyclic module is quasi-projective*, Math. Ann., **189**, (1970), 311-316.

[28] Kosan, M. T., Quynh, T. C., Srivastava, A. K., *Rings with each right ideal automorphism-invariant*, J. Pure Appl. Algebra, **220**, (2016), 1525-1537.

[29] Kosan, M. T., Quynh, T. C., Sahinkaya, S., *On dual automorphism-invariant and superfluous ADS-modules*, Contemporary Mathematics, **727**, (2019), 11pp.

[30] Kosan, T. M., Ha, N. T. T., Quynh, T. C., *Rings for which every cyclic module is dual automorphism-invariant*, J. Algebra and its Appl., **15** (5), (2016), 11pp.

[31] Kasch, F., Mader, A., *Regularity and Substructures of Hom*, Frontiers in Mathematics, Basel, (2009).

[32] Lee, T. K., Zhou, Y., *Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls*, J. Algebra Appl., **12**, (2013), 1250159, 9 pp.

[33] Lam, T. Y., *Lectures on modules and rings*, Grad. texts in Math., **189**, Springer.,(1998).

[34] Mohammed, S. H., Muller, B. J., *Continous and Discrete Modules*, London Math. Soc. LN, **147**, Cambridge Univ. Press, (1990).

[35] Mohammed, S. H., Muller, B. J., *On the exchange property for quasi-continuous modules*, Abelian Groups and Modules (Padova, 1994), Nlathematics and its Applications, **343**, (1995), 367-372.

[36] Nicholson, W. K., *I-rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **207**, (1975), 361-373.

[37] Nicholson, W. K., Yousif, M. F., *Quasi-Frobenius rings*, Cambridge Univ. Press, New York (2003).

[38] Nicholson, W. K., Zhou, Y., *Semiregular morphism*, Commun. Algebra, **34**, (2006), 219-233.

[39] Osofsky, B. L., *Rings all of whose finitely generated modules are injective*, Pacific J. Math. **14** (2), (1964), 645-650.

[40] Quynh, T. C., Kosan, M. T., Thuyet, L. V., *On (semi)regular morphisms*, Commun. Algebra, **41**, (2013), 2933-2947.

[41] Quynh, T. C., Kosan, M. T., *On automorphism-invariant modules*, J. Algebra Appl., **14** (2015), 1550074, 11 pp.

[42] Quynh, T. C., Abyzov, A. N., Ha, N. T. T., Yildirim, T., *Modules close to the automorphism-invariant and coinvariant*, J. Algebra and its Appl., **18** (12), (2019), 1950235, 24pp.

[43] Santa-Clara, C., *Extending modules with injective or semisimple summands*, J. Pure Applied Algebra, **127**, (1998), 193-203.

[44] Singh, S., Srivastava, A. K., *Dual automorphism-invariant modules*, J. Algebra, **371**, (2012), 262-275.

[45] Singh, S., Srivastava, A. K., *Rings of invariant module type and automorphism-invariant modules*, Ring theory Appl., Contemp. Math., Amer. Math. Soc., **609**, (2014), 299-311.

[46] Thuyet, L. V., Quynh, T. C., *On small injective, simple-injective and quasi-Frobenius rings*, Acta Math. Univ. Comenian (N. S.), **78** (2), (2009), 161-172.

[47] Thuyet, L.V., Dan, P., Quynh, T. C., *Modules which are invariant under idempotents of their envelopes*, Colloq. Math., **143** (2), (2016), 237-250.

[48] Tuganbaev, A. A., *Automorphism-invariant semi-Artinian modules*, J. Algebra Appl, **16**, (2017), 1750029, 5pp

[49] Tuganbaev, A. A., *Injective and automorphism-invariant non-singular modules*, Commun. Algebra, **46**, (2018), 1716-1721.

[50] Tuganbaev, A. A., *Automorphism-invariant non-singular rings and modules*, J. Algebra, **485**, (2017), 247-253.

[51] Warfield Jr, R. B., *Decomposition of injective modules*, Pacific J. Math. **31**, (1969), 263-276.

[52] Wisbauer, R., *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach. Reading, (1991).

[53] Zhou, Y., *On (semi)regularity and the total of rings and modules*, J. Algebra, **322**, (2009), 562-578.

[54] Zinimermann-Huisgen, B., Zimmermann, W., *Classes of modules with the exchange property*, J. Algebra, **88**, (1984), 416-434.