ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU HÀ

MÔĐUN NỘI XẠ CỐT YẾU: CÁC ĐẶC TRƯNG VÀ MỞ RỘNG

NGÀNH: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
MÃ SỐ: 9 46 01 04

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HUẾ - NĂM 2020

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm-Đại học Huế.

Người hướng dẫn khoa học:

1. PGS. TS. Trương Công Quỳnh

2. GS. TS. Lê Văn Thuyết

Phản biện 1: ...

Phản biện 2: ...

Phản biện 3: ...

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận án cấp Đại học Huế họp tại:

....

Vào hồi ..... giờ ..... ngày .... tháng .... năm 2020.

Có thể tìm hiểu luận án tại:

1. Trung tâm học liệu-Đại học Huế.
2. Thư viện trường Đại học Sư phạm-Đại học Huế.

MỞ ĐẦU

Cùng với nhóm và trường, vành là một trong ba cấu trúc cơ bản nhất của đại số và có nhiều ứng dụng rộng rãi. Theo một cách cổ điển, người ta sẽ xét tính chất một vành bằng cách đi tìm hiểu các tính chất của cấu trúc con trên vành như iđêan, vành con, đồng cấu.... Sau này người ta chứng minh được rằng tính chất của các R-môđun trên vành R cũng ảnh hưởng đến tính chất của chính vành đó. Chẳng hạn như khi mà mọi R-môđun phải (trái) là nội xạ (xạ ảnh) thì vành đó là vành nửa đơn. Vì thế, trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu cấu trúc của vành thông qua việc xem xét các môđun trên chúng.

Trong lý thuyết môđun thì hai lớp môđun nội xạ và xạ ảnh đóng vai trò chủ đạo. Ý tưởng về môđun nội xạ xuất hiện đầu tiên vào năm 1940 do Baer đưa ra cho nhóm Aben, nhưng thuật ngữ "nội xạ" được đưa ra bởi Eckman-Schopf năm 1953.

Trong quá trình nghiên cứu lớp môđun nội xạ, các nhà khoa học bắt đầu chú ý đến việc mở rộng lớp môđun này, mục đích là bổ sung một số tính chất vào một môđun nội xạ để có thể đặc trưng vành được dễ dàng hơn.

Mở rộng của môđun nội xạ là môđun tựa nội xạ được các tác giả Johnson và Wong đưa ra năm 1961. Môđun tựa nội xạ là một mở rộng thực sự của môđun nội xạ. Các tác giả trên cũng đã chứng minh được rằng một môđun là tựa nội xạ nếu nó bất biến qua mọi tự đồng cấu của bao nội xạ của nó. Kết quả này đưa ra một xu thế mới khi nghiên cứu về lý thuyết môđun, đó là nghiên cứu các môđun bất biến.

Tiếp tục theo hướng mở rộng này, một mở rộng khác của môđun nội xạ, đó là môđun nội xạ cốt yếu đã được đưa ra trong sách chuyên khảo của Dung-Huynh-Smith-Wisbauer (1994).

Các kết quả về môđun nội xạ cốt yếu chủ yếu được các tác giả Dung-Huynh-Smith-Wisbauer (1994) và Santa-Clara (1998) giới thiệu.

Luận án này tiếp tục nghiên cứu các tính chất của môđun nội xạ cốt yếu để từ đó tìm ra mối liên hệ với các lớp môđun khác, đồng thời đặc trưng trên các vành quen thuộc. Vì vậy chúng tôi chọn tên đề tài là "**Môđun nội xạ cốt yếu: Các đặc trưng và mở rộng**".

Luận án được chúng tôi trình bày thành 3 chương.

Chương 1 nhắc lại các khái niệm cơ bản và một số kết quả đã biết.

Chương 2 chủ yếu nghiên cứu các tính chất của môđun nội xạ cốt yếu và tựa nội xạ cốt yếu, đồng thời đưa ra các kết quả liên quan giữa lớp môđun nội xạ cốt yếu và lớp môđun bất biến đẳng cấu.

Như đã nói ở trên, năm 1994, các tác giả Dung-Huynh-Smith-Wisbauer đã đưa ra khái niệm môđun nội xạ cốt yếu, đồng thời giới thiệu một số tính chất của lớp môđun này. Tiếp đó, năm 1998, Santa-Clara cũng đưa ra được thêm các tính chất mới của lớp môđun nội xạ cốt yếu. Trong luận án này, ngoài việc đưa ra thêm được một số tính chất mới của môđun nội xạ cốt yếu, chúng tôi còn đặc trưng được một số vành quen thuộc thông qua lớp môđun này như vành tự đồng cấu, V-vành, vành Noether và vành nửa Artin (được trình bày trong Chương 3).

Những kết quả mới của môđun nội xạ cốt yếu mà chúng tôi thu được, gồm các đặc trưng của môđun N-nội xạ cốt yếu (Định lý 2.2.2, Định lý 2.2.5, Định lý 2.2.8 và Định lý 2.2.12). Các tác giả Johnson-Wong đã chứng minh rằng với hai R-môđun phải M và N, thì M là N-nội xạ khi và chỉ khi $f(N) \leq M$ với mọi đồng cấu $f : E(N) \to E(M)$. Chúng tôi chứng minh được rằng điều đó vẫn đúng với môđun M là N-nội xạ cốt yếu nếu bổ sung thêm điều kiện $Ker(f) \leq^e E(N)$ (Định lý 2.2.2).

Sau khi Jonhson và Wong chứng minh được rằng lớp các môđun bất biến dưới các tự đồng cấu của bao nội xạ chính là lớp môđun tựa nội xạ thì vấn đề nghiên cứu những môđun bất biến dưới các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó được chú ý nhiều hơn. Tiếp tục theo hướng này, Dickson và Fuller (1969) xem xét các môđun bất biến dưới các tập con khác của vành các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó, cụ thể là tập con của vành các tự đẳng cấu. Từ những kết quả ban đầu này, người ta nghĩ đến việc mở rộng môđun nội xạ theo hai hướng, hướng thứ nhất là mở rộng bằng cách thêm hoặc bớt các điều kiện trong định nghĩa gốc của môđun nội xạ (như mở rộng thành môđun nội xạ cốt yếu mà chúng tôi trình bày phía trên), và hướng thứ hai là mở rộng bằng cách nghiên cứu lớp môđun bất biến dưới các tập con khác (chẳng hạn các đẳng cấu) của vành các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó.

Năm 2013, các tác giả Lee-Zhou đã đưa ra định nghĩa môđun bất biến đẳng cấu, theo đó, môđun M được gọi là *bất biến đẳng cấu* nếu nó bất biến dưới các tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó. Định lý 2.2.9 của chúng tôi đã chỉ ra được mối quan hệ giữa môđun tựa nội xạ cốt yếu và môđun bất biến đẳng cấu. Chúng tôi tiếp tục chứng minh được các tính chất của tổng trực tiếp, tích trực tiếp của các môđun nội xạ cốt yếu. Định lý 2.2.12 là một phiên bản của một kết quả của các tác giả Cartan-Eilenberg, Faith-Walker, Bass, Matlis, Papp và Kushan dành cho môđun nội xạ cốt yếu. Định lý 2.2.14 cho chúng tôi kết quả: mọi R-môđun phải là nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi mọi R-môđun suy biến là môđun nửa đơn, là một mở rộng của Định lý Osofsky.

Tính chất trao đổi và tính chất trao đổi hữu hạn của môđun được đưa ra năm 1964 bởi các tác giả Crawley-Jónsson. Hai câu hỏi được đưa ra là "Những môđun như thế nào sẽ thỏa mãn tính chất trao đổi?", và "Những môđun nào mà khi thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn cũng sẽ thỏa mãn tính chất trao đổi?". Đã có nhiều tác giả đưa ra các câu trả lời cho các môđun khác nhau, và chúng tôi cũng đã trả lời cả hai câu hỏi này trong trường hợp M là môđun tựa nội xạ cốt yếu trong Định lý 2.2.9 và Định lý 2.2.11.

Trong Chương 3, chúng tôi nghiên cứu một mở rộng của môđun xạ ảnh là môđun xạ ảnh bé, tức là môđun đối ngẫu của môđun nội xạ cốt yếu. Song song đó chúng tôi cũng xem xét lớp môđun đối bất biến đẳng cấu và tìm ra mối liên hệ giữa môđun tựa xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu trong Định lý 3.1.11. Các kết quả về tính chất trao đổi và tính chất trao đổi hữu hạn cũng được chúng tôi giải quyết với môđun tựa xạ ảnh bé trong Định lý 3.1.11 và Định lý 3.1.12. Phần sau của chương chúng tôi đặc trưng một số vành quen thuộc thông qua môđun nội xạ cốt yếu và môđun xạ ảnh bé.

Khái niệm V-vành được Faith giới thiệu năm 1967 với định nghĩa như sau, vành R được gọi là *V-vành phải* nếu mọi R-môđun phải đơn là nội xạ, hoặc tương đương, mọi iđêan phải là giao của các iđêan phải cực đại. Định lý 3.2.3 của chúng tôi đã chứng minh được rằng nếu xét R là một vành bất kỳ, thì $R/Soc(R)$ là V-vành phải khi và chỉ khi mọi R-môđun phải là xạ ảnh bé, khi và chỉ khi mọi R-môđun phải đơn là nội xạ cốt yếu.

Phần cuối cùng của Chương 3 dành để giới thiệu lớp vành mà mọi môđun xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu. Chúng tôi nghiên cứu lớp vành này do mối liên hệ giữa môđun xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu trong Định lý 3.1.11.

Năm 1969, các tác giả Jain-Mohamed-Singh đã đưa ra khái niệm *q-vành phải*, là vành mà mọi iđêan phải trên nó là tựa nội xạ. Việc nghiên cứu vành mà mọi môđun phải xiclic trên nó là tựa xạ ảnh được Koehler đưa ra và gọi vành đó là *q^*-vành phải*. Chúng ta nhắc lại rằng một môđun M là tựa nội xạ nếu nó bất biến dưới các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó, hay nói cách khác, mỗi đồng cấu từ một môđun con của M vào M đều mở rộng được đến một tự đồng cấu của M. Từ tính chất này của môđun tựa nội xạ, và từ định nghĩa môđun bất biến đẳng cấu mà Lee-Zhou đưa ra, các tác giả Singh-Srivastava đã tiếp tục đưa ra lớp vành mà mọi iđêan phải là bất biến đẳng cấu, gọi là *a-vành phải*. Ba lớp vành q-vành, q^*-vành và a-vành được các tác giả đặc trưng vành, đưa ra cấu trúc và thu được nhiều tính chất thú vị.

Tiếp tục hướng nghiên cứu này, sau khi giới thiệu khái niệm môđun đối bất biến đẳng cấu, các tác giả Singh-Srivastava đã để ngỏ một vấn đề ở cuối bài báo: Đặc trưng những vành mà mọi môđun phải xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu? Phần này trong chương 3 của chúng tôi đã giải quyết gần như trọn vẹn vấn đề trên. Các kết quả về mối quan hệ của các lớp vành cũng được chúng tôi chú trọng nghiên cứu.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong toàn bộ luận án này, nếu không chú thích gì thêm, vành R đã cho luôn được giả thiết là vành kết hợp, có phần tử đơn vị khác phần tử không, và mọi R-môđun được xét là môđun unita phải hoặc trái.

1.1 Một số ký hiệu và khái niệm cơ bản

Với vành R đã cho, để chỉ M là một R-môđun phải (trái) ta viết M_R ($_RM$, tương ứng). Trong một ngữ cảnh cụ thể của luận án, khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, để ngắn gọn chúng tôi sẽ viết môđun M thay vì M_R. Chúng tôi dùng các ký hiệu $A \leq M$ ($A < M$) để chỉ A là môđun con (tương ứng, môđun con thực sự) của M. Nếu A là một hạng tử trực tiếp của M thì ta ký hiệu là $A \leq^{\oplus} M$. Chúng tôi dùng kí hiệu $\mathbb{M}_n(R)$ để chỉ vành các ma trận vuông cấp n lấy hệ tử trên vành R. Cho I là một tập hợp với bản số $card(I) = \alpha$ và M là môđun nào đó, chúng tôi ký hiệu tổng trực tiếp α bản sao của M là $M^{(I)}$ hoặc $M^{(\alpha)}$, tích trực tiếp α bản sao của M là M^I hoặc M^α. Cho M và N là các R-môđun phải bất kỳ, một đồng cấu từ M vào N được hiểu là đồng cấu từ R-môđun phải M vào R-môđun phải N. Ta dùng ký hiệu $Hom_R(M, N)$ để chỉ tập các R-đồng cấu môđun từ M vào N, và $End_R(M)$ để chỉ tập các tự đồng cấu của R-môđun phải M.

Cho M là một R-môđun phải và một phần tử $m_0 \in M$, khi đó $m_0R = \{m_0r | r \in R\}$ là một môđun con của M và được gọi là *môđun* *con xiclic sinh bởi phần tử* m_0. Một môđun M được gọi là *đơn* nếu $M \neq 0$ và chỉ có đúng hai môđun con là 0 và M. Môđun M là *nửa đơn* nếu M phân tích được thành tổng trực tiếp của các môđun con đơn.

Môđun con A của môđun M được gọi là *cốt yếu* (hay *lớn*) trong M nếu với mỗi môđun con khác không B của M ta đều có $A \cap B \neq 0$. Khi đó ta còn gọi M là một *mở rộng cốt yếu* của A và ký hiệu là $A \leq^e M$. Một đơn cấu $f : M \to N$ được gọi là *đơn cấu cốt yếu* (hay *nhúng cốt yếu*) nếu ảnh của f cốt yếu trong môđun N. Đối ngẫu với khái niệm cốt yếu, môđun con A của môđun M được gọi là *đối cốt yếu* (hay *bé*) trong M nếu với mỗi môđun con $B \neq M$ của M ta đều có $A + B \neq M$, được ký hiệu là $A \ll M$. Một toàn cấu $f : M \to N$ được gọi là *toàn cấu đối cốt yếu* (hay *toàn cấu bé*) nếu $Ker(f) \ll M$. Một môđun $M \neq 0$ được gọi là *môđun đều* nếu mọi môđun con khác không của M là cốt yếu trong M.

1.2 Môđun nội xạ, xạ ảnh và một số mở rộng

Cho M và N là các R-môđun phải. Môđun M được gọi là N-*nội xạ* nếu mọi đồng cấu $f : A \to M$, với A là một môđun con của N, đều mở rộng được đến một đồng cấu $g : N \to M$. Nếu môđun M là M-nội xạ thì ta gọi M là môđun *tựa nội xạ* hoặc *tự nội xạ*, và nếu môđun M là N-nội xạ với mọi R-môđun phải N thì M được gọi là môđun *nội xạ*.

Cho M là một R-môđun phải, đơn cấu $\alpha : M \to N$ được gọi là *bao nội xạ* của M nếu α là đơn cấu cốt yếu và N là môđun nội xạ. Khi $\alpha : M \to N$ là bao nội xạ thì ta thường gọi môđun N là bao nội xạ của M và ký hiệu là $N = E(M)$. Hơn nữa, vì mọi môđun nhúng cốt yếu được vào một môđun nội xạ nên mọi môđun đều có bao nội xạ.

Đối ngẫu với khái niệm môđun nội xạ, ta có khái niệm môđun xạ ảnh. Cho M và N là các R-môđun phải, M được gọi là N-*xạ ảnh* nếu mọi đồng cấu $f : M \to A$ và mỗi toàn cấu $g : N \to A$ đều tồn tại một đồng cấu $h : M \to N$ sao cho $f = gh$. Nếu môđun M là M-xạ ảnh thì ta gọi M là môđun *tựa xạ ảnh* hoặc *tự xạ ảnh*, và nếu môđun M là N-xạ ảnh với mọi R-môđun phải N thì M được gọi là môđun *xạ ảnh*.

1.3 Vành nửa đơn Artin, vành hoàn chỉnh, nửa hoàn chỉnh và các trường hợp tổng quát

Định nghĩa 1.3.1. Một vành R được gọi là *vành địa phương* nếu R có duy nhất một iđêan phải (hoặc trái) cực đại, hay tương đương, nếu $R/J(R)$ là một thể. Vành R là *nửa địa phương* nếu vành thương $R/J(R)$ là Artin nửa đơn.

Định nghĩa 1.3.2. Một vành R được gọi là vành *nửa hoàn chỉnh* nếu R là vành nửa địa phương và các lũy đẳng nâng được modulo $J(R)$. Vành R là *hoàn chỉnh phải* nếu R là vành nửa địa phương và $J(R)$ là T-lũy linh phải.

Định nghĩa 1.3.3. Một vành R được gọi là *vành chính quy* nếu với mỗi phần tử $x \in R$ đều tồn tại phần tử $y \in R$ sao cho $x = xyx$, và vành R được gọi là *nửa chính quy* nếu $R/J(R)$ là chính quy và các lũy đẳng nâng được modulo $J(R)$.

Định nghĩa 1.3.5. Vành R được gọi là *Artin phải* (*Noether phải*, tương ứng) nếu R_R là môđun Artin (Noether, tương ứng).

Định nghĩa 1.3.7. Một vành R được gọi là *vành đơn* nếu $R \neq 0$ và R chỉ có hai iđêan là 0 và R. Vành R là *nửa đơn* nếu nó là tổng trực tiếp của các iđêan phải (trái) cực tiểu, tương đương, là tổng trực tiếp của các vành đơn, tương đương, R_R (${}_RR$) là môđun nửa đơn.

Định nghĩa 1.3.13. Một môđun M được gọi là *nửa Artin* nếu mọi môđun thương khác không của M đều có đế khác không. Một vành R được gọi là *vành nửa Artin phải* nếu R_R là môđun nửa Artin.

Định nghĩa 1.3.15. Vành R được gọi là *V-vành* phải nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện tương đương sau:

(1) Mọi R-môđun phải đơn là nội xạ.

(2) Mọi iđêan phải của R là giao của các iđêan phải cực đại.

Chương 2

Môđun nội xạ cốt yếu và các mở rộng

Trong chương này, chúng tôi chủ yếu nghiên cứu một mở rộng của môđun nội xạ, đó là môđun nội xạ cốt yếu. Chúng tôi đưa ra các tính chất của môđun nội xạ cốt yếu và môđun tựa nội xạ cốt yếu, đồng thời giới thiệu các kết quả liên quan giữa lớp môđun nội xạ cốt yếu và lớp môđun bất biến đẳng cấu.

2.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 2.1.1. Cho M và N là hai R-môđun phải.

(1) M được gọi là *N-nội xạ cốt yếu* nếu mọi đồng cấu với hạt nhân cốt yếu từ một môđun con của N vào M đều mở rộng được tới N.
(2) M được gọi là *tựa (tự) nội xạ cốt yếu* nếu M là M-nội xạ cốt yếu.
(3) M được gọi là môđun *nội xạ cốt yếu* nếu M là N-nội xạ cốt yếu với mọi môđun phải N.
(4) Hai môđun M và N được gọi là *nội xạ cốt yếu lẫn nhau* (hay *nội xạ cốt yếu tương hỗ*) nếu M là N-nội xạ cốt yếu và N là M-nội xạ cốt yếu.
(5) Vành R được gọi là vành *tựa nội xạ cốt yếu phải* nếu R_R là môđun tựa nội xạ cốt yếu.

Chúng ta cũng chú ý rằng môđun M là môđun nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi M là môđun R_R-nội xạ cốt yếu.

Ví dụ 2.1.2.

(1) Cho $n > 1$, khi đó $\mathbb{Z}_n$ là $\mathbb{Z}$-môđun tựa nội xạ, do đó $\mathbb{Z}_n$ cũng là môđun tựa nội xạ cốt yếu.

(2) Mọi môđun không suy biến là môđun nội xạ cốt yếu.

(3) Cho A là một môđun nội xạ chỉ có một môđun con thực sự S. B là môđun không phân tích được và chứa một môđun con đơn Y không đẳng cấu với S. Khi đó B là A-nội xạ cốt yếu nhưng không là A-nội xạ.

(4) Với p là số nguyên tố, ta xét các $\mathbb{Z}$-môđun $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$. Khi đó môđun $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ là $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$-nội xạ cốt yếu nhưng không là $(\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z})$-nội xạ cốt yếu, đồng thời $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ cũng không là $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$-nội xạ.

Định nghĩa 2.1.5. Môđun M được gọi là *môđun bất biến đẳng cấu* nếu nó bất biến dưới các tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó, nghĩa là với mọi đẳng cấu $\alpha : E(M) \to E(M)$ thì $\alpha(M) \leq M$.

Định nghĩa 2.1.6. Cho M và N là các môđun. M được gọi là N-*bất biến đẳng cấu* nếu với mọi môđun con cốt yếu A của N, mọi đơn cấu cốt yếu $f : A \to M$ đều mở rộng được đến một đồng cấu $g : N \to M$, nếu M là M-bất biến đẳng cấu thì M được gọi là môđun bất biến đẳng cấu.

Các định nghĩa 2.1.5 và 2.1.6 đã được chỉ ra là trùng nhau khi $M = N$.

2.2 Các kết quả liên quan đến môđun nội xạ cốt yếu và môđun bất biến đẳng cấu

Bổ đề 2.2.1. *Các điều kiện sau là tương đương đối với các môđun M và N:*

(1) *M là N-nội xạ cốt yếu.*

(2) *Với mỗi R-môđun phải A, với mỗi đơn cấu cốt yếu $g : A \to N$*

và mỗi đồng cấu $f : A \to M$ có hạt nhân cốt yếu, luôn tồn tại đồng cấu $h : N \to M$ sao cho $f = hg$.

Chúng tôi muốn đề cập đến một kết quả quan trọng về tính nội xạ do Johnson-Wong đưa ra: Với hai R-môđun bất kỳ M và N, thì M là N-nội xạ khi và chỉ khi $f(N) \leq M$ với R-đồng cấu $f : E(N) \to E(M)$ từ bao nội xạ của N vào bao nội xạ của M. Định lý sau đây của chúng tôi là mở rộng kết quả trên cho môđun M là N-nội xạ cốt yếu, đồng thời chúng tôi cũng đưa ra điều kiện tương đương của M là N-nội xạ cốt yếu thông qua $J[E(N), E(M)]$.

Định lý 2.2.2. *Các điều kiện sau là tương đương đối với các môđun M và N:*

(1) *M là N-nội xạ cốt yếu.*

(2) *Với mỗi R-đồng cấu $\alpha : E(N) \to E(M)$ từ bao nội xạ của N vào bao nội xạ của M với hạt nhân cốt yếu thì $\alpha(N) \leq M$.*

(3) *$\alpha(N) \leq M$ với mọi α nằm trong $J[E(N), E(M)]$ của $Hom(E(N), E(M))$.*

Từ Định lý 2.2.2, khi cho $N = M$, ta có được hệ quả dưới đây.

Hệ quả 2.2.3. *Các điều kiện sau là tương đương đối với môđun M:*

(1) *M là môđun tựa nội xạ cốt yếu.*

(2) *$\alpha(M) \leq M$ với mỗi tự đồng cấu α của $E(M)$ với hạt nhân cốt yếu.*

(3) *$\alpha(M) \leq M$ với mọi $\alpha \in J(End(E(M)))$*

Mệnh đề 2.2.4. *Cho M và N là hai R-môđun phải. Khi đó:*

(1) *M là N-nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi M là K-nội xạ cốt yếu với mỗi môđun con cốt yếu K của N.*

(2) *Nếu M là N-nội xạ cốt yếu và $K \cong N$ thì M là K-nội xạ cốt yếu.*

(3) *Giả sử $N = A \oplus B$, $M = C \oplus D$ và $\alpha : B \to D$ là một đồng cấu với hạt nhân cốt yếu. Nếu M là N-nội xạ cốt yếu thì C là A-nội xạ cốt yếu.*

(4) *Cho M_1 và M_2 là các môđun, và xét $M := M_1 \oplus M_2$. Khi đó M là tựa nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi M_1 và M_2 là tựa nội xạ cốt yếu, và nội xạ cốt yếu tương hỗ.*

Định lý 2.2.5. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải M:*

(1) *Mọi môđun con của M là tựa nội xạ cốt yếu.*

(2) *M là tựa nội xạ cốt yếu và mọi môđun con cốt yếu của M là bất biến hoàn toàn dưới các tự đồng cấu của M với hạt nhân cốt yếu.*

(3) *Mọi môđun con cốt yếu của M là tựa nội xạ cốt yếu.*

Ví dụ 2.2.6.
(1) Xét môđun M có dàn các môđun con là $0, M, N_1, N_2$, $N_1 \oplus N_2$ sao cho N_1 không đẳng cấu với N_2 và vành các tự đồng cấu của N_1 hoặc N_2 không đẳng cấu với $\mathbb{Z}_2$. Khi đó M là môđun tựa nội xạ cốt yếu nhưng không bất biến đẳng cấu.

(2) Cho F_i là trường và K_i là một trường con thực sự của F_i với $i \geq 1$. Đặt R là ký hiệu cho tập tất cả các dãy trong $\prod F_i$ với hầu hết các phần tử trong K_i. Khi đó R là vành tựa nội xạ cốt yếu giao hoán nhưng không là vành bất biến đẳng cấu (nếu R_R là môđun bất biến đẳng cấu thì vành R được gọi là vành bất biến đẳng cấu phải).

(3) Mỗi miền nguyên giao hoán là một môđun tựa nội xạ cốt yếu trên chính nó. Hơn nữa, nếu R không là trường thì R không là vành bất biến đẳng cấu.

Xét M và N là các R-môđun phải, chúng tôi ký hiệu

$$\Delta[M, N] = \{f \in Hom(M, N) : Ker(f) \leq^e M\}.$$

và

$$\Delta(M) = \{f \in End(M) : Ker(f) \leq^e M\}.$$

Dễ dàng nhận thấy $\Delta(M)$ là một iđêan của $End(M)$.

Định lý 2.2.8. *Cho một R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu M với bao nội xạ $u : M \to E(M)$. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(1) $\Delta(M) \subseteq J(End(M))$.

(2) *Mọi phần tử lũy đẳng của $End(M)$ đều nâng được theo modulo $\Delta(M)$.*

Định lý 2.2.9. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải M với bao nội xạ $u : M \to E(M)$:*

(1) *M là môđun bất biến đẳng cấu.*

(2) *M là môđun tựa nội xạ cốt yếu và $End(M)/\Delta(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi phần tử khả nghịch của $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$.*

Trong trường hợp này, M thỏa mãn tính chất trao đổi.

Điều kiện (C1): Với mọi môđun con A của M, tồn tại hạng tử trực tiếp B của M thỏa mãn $A \leq^e B$.

Điều kiện (C2): Nếu môđun con A của M đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của M thì nó cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

Điều kiện (C3): Nếu A và B là hai hạng tử trực tiếp của M thỏa mãn $A \cap B = 0$ thì $A \oplus B$ cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

Môđun M được gọi là *liên tục* nếu nó thỏa mãn các điều kiện (C1) và (C2).

Môđun M được gọi là *tựa liên tục* nếu nó thỏa mãn điều kiện (C1) và (C3). Môđun tựa liên tục còn được gọi là môđun π-*nội xạ*.

Định lý 2.2.11. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu M:*

(1) *M là tựa liên tục.*

(2) *$End(M)/\Delta(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi lũy đẳng của $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$.*

Lúc này, nếu M thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn thì M cũng thỏa mãn tính chất trao đổi.

Theo ý tưởng của Cartan-Eilenberg, Bass, Matlis, Papp và Kushan về đặc trưng vành Noether phải qua tính chất "tổng trực tiếp của các môđun phải nội xạ là nội xạ", ở đây chúng tôi đã dùng các giả thiết yếu hơn để chứng minh được rằng "tổng trực tiếp của các môđun nội xạ cốt yếu là nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi vành $R/Soc(R)$ là vành Noether phải". Định lý được phát biểu cụ thể như sau.

Định lý 2.2.12. *Các điều kiện sau đây tương đương đối với một vành R:*

(1) *R thỏa mãn điều kiện ACC trên các iđêan phải cốt yếu của R (nghĩa là, $R/Soc(R_R)$ là vành Noether phải).*

(2) *Mỗi tổng trực tiếp của các R-môđun phải nội xạ cốt yếu là nội xạ cốt yếu.*

(3) *Nếu $K_0, K_1, \ldots, K_n \ldots$ là các môđun phải đơn, thì $\oplus_{\mathbb{N}} E(K_i)$ là nội xạ cốt yếu.*

(4) *$E^{(\mathbb{N})}$ là nội xạ cốt yếu với mọi môđun nội xạ cốt yếu E_R.*

Từ định lý trên ta có ngay hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.13. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành R:*

(1) *R thỏa mãn điều kiện ACC trên các iđêan phải cốt yếu của R.*

(2) *Mỗi tổng trực tiếp của các R-môđun phải nội xạ là nội xạ cốt yếu.*

Trong Định lý Osofsky, vành R là nửa đơn khi và chỉ khi mọi R-môđun phải (trái) xiclic là nội xạ, hay tương đương, mọi R-môđun phải là nửa đơn khi và chỉ khi mọi R-môđun phải (trái) xiclic là nội xạ. Mở rộng kết quả này, chúng tôi chứng minh được rằng mọi R-môđun phải là nội xạ cốt yếu khi và chỉ khi mọi R-môđun suy biến là nửa đơn.

Định lý 2.2.14. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành R:*

(1) *Mọi R-môđun phải là nội xạ cốt yếu.*

(2) *Mọi R-môđun phải xiclic là nội xạ cốt yếu.*

(3) *Mọi R-môđun suy biến là môđun nửa đơn.*

KẾT LUẬN CỦA CHƯƠNG 2

Trong chương này chúng tôi đã thu được một số kết quả chính sau đây.

1. Trong phần đầu của chương, chúng tôi thu được đặc trưng của môđun N-nội xạ cốt yếu (Bổ đề 2.2.1, Định lý 2.2.2), chúng tôi cũng chứng minh được một môđun là tựa nội xạ cốt yếu nếu nó bất biến dưới các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó với hạt nhân cốt yếu (Hệ quả 2.2.3).

2. Tiếp đó chúng tôi cũng mở rộng được một số tính chất mới của môđun nội xạ cốt yếu từ những tính chất đã biết (Mệnh đề 2.2.4, Mệnh đề 2.2.5, Định lý 2.2.12). Mối quan hệ giữa môđun tựa nội xạ cốt yếu, môđun bất biến đẳng cấu và môđun thỏa mãn tính chất trao đổi cũng cho chúng tôi một số kết quả thú vị (Định lý 2.2.9 và Định lý 2.2.11).

3. Phần cuối của chương chúng tôi thu được Định lý 2.2.14 chỉ ra mối quan hệ giữa môđun nội xạ cốt yếu và môđun suy biến.

Chương 3

Môđun xạ ảnh bé và các vành liên quan

Sau khi nghiên cứu về lớp các môđun nội xạ cốt yếu và môđun bất biến đẳng cấu ở Chương 2, chúng tôi tiếp tục chú ý đến lớp môđun đối ngẫu của chúng, là lớp môđun xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu. Phần sau của chương chúng tôi đặc trưng các môđun này trên một số vành quen thuộc. Phần cuối cùng của chương nghiên cứu về vành mà mọi môđun xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu, tên là a^*-vành.

3.1 Môđun xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu

Định nghĩa 3.1.1. *Cho hai R-môđun phải M và N.*

(1) M được gọi là *N-xạ ảnh bé* nếu mỗi R-đồng cấu $f : M \to K$ với $Im(f) \ll K$ và mỗi toàn cấu $p : N \to K$ thì luôn tồn tại một đồng cấu $g : M \to N$ sao cho $p \circ g = f$.

(2) M được gọi là *tựa xạ ảnh bé* nếu M là M-xạ ảnh bé.

(3) M được gọi là *xạ ảnh bé* nếu M là N-xạ ảnh bé với mọi môđun N.

Ví dụ 3.1.2.

(1) Từ Định nghĩa 3.1.1 ta có, nếu M là môđun xạ ảnh thì M là xạ ảnh bé, và nếu M là tựa xạ ảnh thì M là tựa xạ ảnh bé. Điều ngược lại không đúng trong trường hợp tổng quát.

(2) Môđun nửa đơn là môđun tựa xạ ảnh, nên nó là môđun tựa xạ ảnh bé.

(3) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ là môđun tựa xạ ảnh bé trên vành $\mathbb{Z}$.

Định nghĩa 3.1.3. Môđun M được gọi là *đối bất biến đẳng cấu* nếu với mọi môđun con bé K_1 và K_2 của M, thì mọi toàn cấu $\eta : M/K_1 \to M/K_2$ với hạt nhân bé nâng đến một tự đồng cấu φ của M.

Ví dụ 3.1.5.

(1) $\mathbb{Z}_2$ và $\mathbb{Z}_4$ là các $\mathbb{Z}$-môđun đối bất biến đẳng cấu, nhưng $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ không là $\mathbb{Z}$-môđun đối bất biến đẳng cấu.

(2) $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ là $\mathbb{Z}$-môđun đối bất biến đẳng cấu, nhưng $(2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ không là $\mathbb{Z}$-môđun đối bất biến đẳng cấu.

(3) Môđun không có môđun con bé nào khác không là môđun đối bất biến đẳng cấu. Do đó mọi môđun nửa nguyên thủy đều là môđun đối bất biến tự đẳng cấu (môđun M được gọi là *nửa nguyên thủy* nếu $Rad(M) = 0$).

(4) Gọi R là vành cho bởi $\begin{bmatrix} \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & \mathbb{F}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F}_2 \end{bmatrix}$ trong đó $\mathbb{F}_2$ là trường có hai phần tử. Lấy $M = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Nghĩa là $M = e_{11}R$, trong đó e_{11} là một lũy đẳng nguyên thủy. Lúc này $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M, \mathbb{F}_2)$ là R-môđun trái đối bất biến đẳng cấu, nên nó là môđun xạ ảnh bé, nhưng $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M, \mathbb{F}_2)$ không là tựa xạ ảnh.

Định lý 3.1.7. *Cho R là vành hoàn chỉnh phải và M, N là các R-môđun phải với các phủ xạ ảnh $\pi_1 : P_1 \to M, \pi_2 : P_2 \to N$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(1) *M là N-xạ ảnh bé.*

(2) *Với mỗi R-đồng cấu $f : P_1 \to P_2$ của các R-môđun phải với ảnh bé, $f(Ker(\pi_1)) \leq Ker(\pi_2)$.*

Khi cho $N = M$, ta thu được ngay hệ quả sau.

Hệ quả 3.1.8. *Cho R là vành hoàn chỉnh phải. Các điều kiện sau sau là tương đương đối với một R-môđun phải M có phủ xạ ảnh $\pi : P \to M$:*

(1) *M là môđun tựa xạ ảnh bé.*

(2) *$Ker(\pi)$ bất biến dưới các tự đồng cấu của P với ảnh bé.*

Xét M và N là các R-môđun phải, chúng tôi ký hiệu

$$\nabla[M, N] = \{f \in Hom(M, N) : Im(f) \ll N\}$$

và

$$\nabla(M) = \{f \in End(M) : Im(f) \ll M\}.$$

Rõ ràng $\nabla(M)$ là một iđêan của $End(M)$.

Định lý tiếp theo chỉ ra mối quan hệ giữa môđun tựa xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu.

Định lý 3.1.11. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải M với một phủ xạ ảnh $p : X \to M$:*

(1) *M là môđun đối bất biến đẳng cấu.*

(2) *M là môđun tựa xạ ảnh bé và $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$.*

Trong trường hợp này, M thỏa mãn tính chất trao đổi.

Một R-môđun M được gọi là *rời rạc* nếu M thỏa mãn các điều kiện (D1) và (D2) sau đây.

Điều kiện (D1): Với môđun con bất kỳ N của M đều tồn tại một hạng tử trực tiếp K của M sao cho $K \leq N$ và $N/K \ll M/K$.

Điều kiện (D2): Nếu N là môđun con của M sao cho M/N đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của M, thì N cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

Môđun M được gọi là *tựa rời rạc* nếu M thỏa mãn điều kiện (D1) và điều kiện (D3) sau:

Điều kiện (D3): Với các hạng tử trực tiếp K và L của M mà $M = K + L$, thì $K \cap L$ cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

Đối ngẫu với Định lý 2.2.11, chúng tôi thu được kết quả sau về môđun rời rạc.

Định lý 3.1.12. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải tựa xạ ảnh bé M với $p : X \to M$ là phủ xạ ảnh trên vành hoàn chỉnh R:*

(1) *M là môđun tựa rời rạc.*

(2) *$End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các lũy đẳng của $\dfrac{End(X)}{J(End(X))}$.*

Lúc này, nếu M thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn thì M cũng thỏa mãn tính chất trao đổi.

3.2 Đặc trưng môđun nội xạ cốt yếu và xạ ảnh bé trên các vành liên quan

Tính chất thường dùng của V-vành đó là nếu R là V-vành phải thì mọi R-môđun phải đơn là nội xạ. Chúng tôi cũng đặc trưng được tính chất của V-vành cho $R/Soc(R_R)$ nhưng thông qua môđun nội xạ cốt yếu và môđun xạ ảnh bé.

Định lý 3.2.3. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành R:*

(1) *$R/Soc(R_R)$ là V-vành phải.*

(2) *Mọi R-môđun phải là xạ ảnh bé.*

(3) *Mọi R-môđun phải hữu hạn sinh là xạ ảnh bé.*

(4) *Mọi R-môđun phải xiclic là xạ ảnh bé.*

(5) *Mọi R-môđun phải nửa đơn là xạ ảnh bé.*

(6) *Mọi R-môđun phải đơn là xạ ảnh bé.*

(7) *Mọi R-môđun phải đơn là nội xạ cốt yếu.*

Kết quả sau đây đưa ra mối quan hệ giữa môđun nội xạ cốt yếu, môđun xạ ảnh bé, môđun nửa đơn và môđun suy biến trên một vành nửa Artin.

Hệ quả 3.2.4. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành nửa Artin phải R:*

(1) *R không suy biến phải và $R/Soc(R_R)$ là V-vành phải.*

(2) *R không suy biến phải và mọi R-môđun phải (đơn, nửa đơn) là xạ ảnh bé.*

(3) *R không suy biến phải và mọi R-môđun phải đơn là nội xạ cốt yếu.*

(4) *Mọi R-môđun phải đơn, suy biến là nội xạ.*

3.3 Vành mà mọi môđun xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu

Định nghĩa 3.3.1.

(1) Vành R được gọi là *q-vành phải* nếu mọi iđêan phải trên nó là tựa nội xạ.

(2) Vành R được gọi là *q^*-vành phải* nếu mọi R-môđun phải xiclic trên nó là tựa xạ ảnh.

(3) Vành R được gọi là *a-vành phải* nếu mọi iđêan phải trên nó là bất biến đẳng cấu.

(4) Vành R được gọi là *a^*-vành phải* nếu mọi R-môđun phải xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu.

Ví dụ 3.3.2.

(1) Mọi q^*-vành phải và mọi V-vành phải đều là a^*-vành phải.

(2) Một vành nửa hoàn chỉnh và V-vành phải là q^*-vành phải.

(3) Cho R là vành V-vành phải, di truyền phải, Nơte phải và nguyên tố, nhưng không là vành Artin nửa đơn (ví dụ như miền Cozzens's). Lúc này R là a^*-vành phải nhưng không là q^*-vành phải.

Chúng tôi đưa ra cấu trúc của a^*-vành trong định lý sau.

Định lý 3.3.4. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một vành nửa hoàn chỉnh R:*

(1) *R là a^*-vành phải.*

(2) *Mỗi iđêan phải trong $J(R)$ là một T-môđun trái, trong đó T là một vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch của R.*

Nhận xét 3.3.5. q^*-vành phải và q^*-vành trái là không trùng nhau trong trường hợp tổng quát. Ví dụ lấy

$$R = \{\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{c} \end{pmatrix} : \quad \bar{a} \in \mathbb{Z}_4; \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_2\},$$

lúc đó R là q^*-vành phải nửa hoàn chỉnh nhưng không là q^*-vành trái. Tuy nhiên trong trường hợp này R lại là a^*-vành trái và phải.

Kết quả tiếp theo cho chúng ta một sự phân tích của a^*-vành.

Định lý 3.3.6. *Cho R là a^*-vành phải bất biến đẳng cấu phải nửa hoàn chỉnh. Khi đó, ta có phân tích $R = S \oplus T$, trong đó*

(1) *S là vành Artin nửa đơn;*

(2) *$T = e_1R \oplus e_2R \oplus \cdots \oplus e_nR$, với $e_1, e_2, \ldots, e_n$ là các lũy đẳng địa phương trực giao, và $e_iR \ncong e_jR$ với mọi $i \neq j$.*

Định lý 3.3.7. *Nếu R là vành nguyên tố a^*-vành phải nửa hoàn chỉnh, thì R hoặc là vành Artin đơn, hoặc là vành địa phương.*

Vậy khi nào thì một a^*-vành phải là vành Artin nửa đơn? Chúng tôi trả lời câu hỏi này trong định lý sau.

Định lý 3.3.9. *Các khẳng định sau là tương đương đối với một vành R:*

(1) *R là vành Artin nửa đơn.*

(2) *R là vành nửa hoàn chỉnh và $\mathbb{M}_n(R)$ là a^*-vành phải với mọi $n > 1$.*

Định lý sau đây của chúng tôi đóng vai trò chính trong chứng minh các kết quả tiếp theo của chương.

Định lý 3.3.10. *Cho vành R là a^*-vành phải nửa hoàn chỉnh. Khi đó mọi iđêan phải cốt yếu là bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R.*

Từ định lý trên, chúng tôi thu được các kết quả về mối liên hệ giữa a-vành và a^*-vành trong hệ quả sau.

Hệ quả 3.3.11. *Cho R là a^*-vành phải nửa hoàn chỉnh. Nếu R là vành bất biến đẳng cấu phải thì R là a-vành phải.*

Từ Nhận xét 3.3.5, một câu hỏi đặt ra rất tự nhiên, đó là, vành a^*-vành phải và trái có trùng nhau không? Ví dụ tiếp theo của chúng tôi sẽ cho thấy câu trả lời là không.

Ví dụ 3.3.12. (Ví dụ Björk) Cho $\mathbb{F}$ là trường và giả sử $\varphi : \mathbb{F} \to \bar{\mathbb{F}} \subseteq \mathbb{F}$ là đẳng cấu được xác định bởi $a \mapsto \overline{a}$, trong đó trường con $\bar{\mathbb{F}} \neq \mathbb{F}$. Đặt R ký hiệu cho không gian véc tơ trái có cơ sở là $\{1, t\}$, và cho R vào một $\mathbb{F}$-đại số theo cách xác định $t^2 = 0$ và $ta = \varphi(a)t$ với mọi $a \in F$. Chú ý rằng lúc này R là vành Artin trái và $J(R) = Rt = \mathbb{F}t$ là iđêan trái thực sự duy nhất của R. Rõ ràng R là a^*-vành trái nhưng R không là a^*-vành phải.

Trong Định lý 3.3.10, xét trên vành R nửa hoàn chỉnh, nếu R là a^*-vành phải thì mọi iđêan phải cốt yếu đều bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R. Bổ đề dưới đây của chúng tôi trả lời câu hỏi ngược lại.

Bổ đề 3.3.13. *Giả sử R là vành nửa hoàn chỉnh và mọi iđêan phải cốt yếu đều bất biến dưới các phần tử khả nghịch của R. Nếu mọi iđêan trái chính bé là linh hóa tử trái thì R là a^*-vành trái.*

Như chúng tôi đã chỉ ra trong Ví dụ 3.3.12, trong trường hợp tổng quát thì a^*-vành trái và a^*-vành phải không trùng nhau, tuy nhiên trong định lý sau chúng tôi chỉ ra được lúc nào thì hai lớp vành trên là trùng nhau.

Định lý 3.3.14. *Giả sử R là vành nửa hoàn chỉnh và mọi iđêan trái chính bé là linh hóa tử trái. Lúc này nếu R là a^*-vành phải thì R cũng là a^*-vành trái.*

Định lý cuối cùng trong chương này của chúng tôi dùng để chỉ ra quan hệ giữa vành đối sinh và a^*-vành. Định lý được phát biểu như sau.

Định lý 3.3.16. *Nếu R là vành CS phải, đối sinh phải và a-vành phải thì R là a^*-vành phải và trái.*

KẾT LUẬN CỦA CHƯƠNG 3

Trong chương này chúng tôi đã thu được các kết quả chính sau.

1. Trong phần đầu của chương chúng tôi thu được đặc trưng của môđun N-xạ ảnh bé thông qua đồng cấu môđun trên các hạt nhân của các phủ xạ ảnh (Định lý 3.1.7), và có được kết quả tương tự cho môđun tựa xạ ảnh bé ở Hệ quả 3.1.8.

2. Trong phần tiếp theo chúng tôi giới thiệu các kết quả của môđun đối bất biến đẳng cấu. Mối quan hệ giữa môđun tựa xạ ảnh bé và môđun đối bất biến đẳng cấu được giải quyết trong Định lý 3.1.11, kết quả về môđun thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn cũng sẽ thỏa mãn tính chất trao đổi được chúng tôi đưa ra trong Định lý 3.1.12. Các đặc trưng của V-vành và vành nửa Artin thông qua môđun nội xạ cốt yếu và môđun xạ ảnh bé lần lượt được trình bày trong Định lý 3.2.3 và Hệ quả 3.2.4.

3. Trong mục 3.3 về vành mà mọi môđun xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu chúng tôi đã thu được các kết quả chính như sau. Chúng tôi mô tả được cấu trúc của a^*-vành bằng Định lý 3.3.4 như sau, một vành nửa hoàn chỉnh R là a^*-vành khi và chỉ khi mỗi iđêan phải trong $J(R)$ là một T-môđun trái, với T là vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch. Định lý 3.3.6 cho chúng tôi sự phân tích của a^*-vành. Vì một vành nguyên tố a^*-vành chưa chắc là vành Artin đơn, nên chúng tôi đưa ra Định lý 3.3.7 để khẳng định rằng một vành nguyên tố, a^*-vành nửa hoàn chỉnh sẽ hoặc là vành Artin đơn hoặc là vành địa phương. Chúng tôi cũng trả lời cho câu hỏi khi nào thì vành a^*-vành là vành Artin nửa đơn trong Định lý 3.3.9. Định lý 3.3.14 nói rằng nếu cho R là vành hoàn chỉnh thỏa mãn mọi iđêan trái chính bé là các linh hóa tử trái, lúc này nếu R là a^*-vành phải thì R cũng là a^*-vành trái.

4. Phần còn lại của chương chúng tôi đưa ra các kết quả về mối quan hệ giữa các lớp vành, cụ thể, quan hệ giữa a-vành phải và a^*-vành phải được giới thiệu trong Hệ quả 3.3.11, Định lý 3.3.16; quan hệ giữa vành nửa hoàn chỉnh và a^*-vành được nêu trong Bổ đề 3.3.13.

KẾT LUẬN

Trong luận án này, chúng tôi đã thu được những kết quả chính sau đây:

1. Từ việc nghiên cứu về môđun nội xạ cốt yếu, chúng tôi đã đưa ra được một số đặc trưng của môđun nội xạ cốt yếu (Định lý 2.2.2, Mệnh đề 2.2.4 và Mệnh đề 2.2.5). Ngoài ra, chúng tôi cũng đã thu được một số kết quả về quan hệ giữa môđun nội xạ cốt yếu và môđun bất biến đẳng cấu, tiêu biểu là Định lý 2.2.9. Chúng tôi cũng đã trả lời được một phần cho câu hỏi mà Crawley-Jónsson nêu ra về môđun thỏa mãn tính chất trao đổi trong trường hợp M là môđun nội xạ cốt yếu (Định lý 2.2.11) và khi M là môđun xạ ảnh bé (Định lý 3.1.12).

2. Chúng ta thường nhắc đến một trong những đặc trưng quan trọng của vành Noether phải, đó là, trên vành Noether phải thì tổng trực tiếp của các môđun nội xạ là nội xạ. Định lý 2.2.12 cho chúng tôi một kết quả tương tự đối với môđun nội xạ cốt yếu, đó là, nếu vành $R/Soc(R)$ là vành Noether phải thì tổng trực tiếp của mọi R-môđun phải nội xạ cốt yếu là nội xạ cốt yếu. Một kết quả nổi bật khác trong mục này là Định lý 2.2.14, chúng tôi đã mở rộng Định lý Osofsky cho môđun nội xạ cốt yếu.

3. Khi nghiên cứu lớp vành mà mọi môđun xiclic trên nó là đối bất biến đẳng cấu, chúng tôi đã giải quyết được gần như trọn vẹn câu hỏi mà Singh-Srivastava đưa ra, đó là mô tả và đặc trưng lớp a^*-vành. Chúng tôi đã đưa ra được cấu trúc của a^*-vành ở Định lý 3.3.4, sự phân tích của nó cũng được giới thiệu trong Định lý 3.3.6. Các kết quả và ví dụ để phân biệt các lớp vành có liên quan cũng được chúng tôi chú trọng và chứng minh chi tiết.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Nguyễn Thị Thu Hà, *Các đặc trưng của môđun xạ ảnh bé*, Tạp chí khoa học, Đại học Huế (nhận đăng tháng 5-2020).

2. Kosan, T. M., Ha, N. T. T., Quynh, T. C., *Rings for which every cyclic module is dual automorphism-invariant*, J. Algebra and its Appl., **15** (5), (2016), 11pp.

3. Quynh, T. C., Abyzov, A. N., Ha, N. T. T., Yildirim, T., *Modules close to the automorphism-invariant and coinvariant*, J. Algebra and its Appl., **18** (12), (2019), 24pp.

HUE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF EDUCATION

NGUYEN THI THU HA

ESSENTIALLY INJECTIVE MODULES: CHARACTERISTICS AND GENERALIZATIONS

MAJOR: ALGEBRA AND NUMBER THEORY

CODE: 9 46 01 04

SUMMARY OF DOCTORAL THESIS IN MATHEMATICS

HUE - 2020

This research project is done at: University of Education, Hue University.

Scientific advisors:

1. **Assoc. Prof. Dr. Truong Cong Quynh**
2. **Prof. Dr. Le Van Thuyet**

Reviewer 1: ...

Reviewer 2: ...

Reviewer 3: ...

The thesis will be defended under the assessment of Hue University Doctoral Assessment Committee on...

....

This thesis is accessible at:

1. Learning Resource Centre, Hue University.
2. Library of University of Education, Hue University.

INTRODUCTION

Together with groups and fields, rings are one of the three most basic structures of algebra and have a wide range of applications. In a classical way, one would consider a ring by looking at the properties of substructures such as ideals, subrings, homomorphisms, ..., then one would find that the properties of R-modules on the ring also affect the characteristics of the ring itself. For example, when every right (left) R-modules is injective (projective), the ring is a semisimple ring. Therefore, in this thesis, we study the structure of rings by looking at the modules on them.

In module theory, the two classes injective and projective modules play a leading role. The idea of injective modules was first introduced in 1940 by Baer for the Aben group, but the term "injective" was coined by Eckman-Schopf in 1953.

In the process of studying the injective modules, scientists began to pay attention to the extension of this module class, the purpose was to add some properties to an injective modules to be able to characterize rings easier.

The extension of the injective modules was given by the authors Johnson and Wong in 1961, that is self-injective modules. The self-injective module is a proper extension of the injective module. The authors have also proved that a module is self-injective if it is invariant through all endormorphism of its injective envelope. This result presents a new trend in the study of modules theory, which is the study of invariant modules.

Continuing in the direction of this extension, another extension of injective modules is the essentially injective modules which is present in Dung-Huynh-Smith-Wisbauer's book (1994)

The results of essentially injective modules are mainly presented by Dung-Huynh-Smith-Wisbauer (1994) and Santa-Clara (1998).

This thesis continues to study the properties of essentially injective modules, from which to find the relationship with other classes modules, and also characteristics on familiar rings. So we chose the thesis name as "**Essentially injective modules: characteristics and generalizations**".

The structure of the thesis is divided into three chapters.

Chapter 1 presents the basic concepts and some known results.

Chapter 2, we mainly study the properties of the essentially injective modules and essentially self-injective modules, and at the same time give the related results between the essentially injective modules and the automophism-invariant modules.

As mentioned above, in 1994, essentially injective modules and some properties of them were introduced in Dung-Huynh-Smith-

Wisbauer's book. Later, in 1998, Santa-Clara also introduced some new properties of this module class. In this thesis, in addition to adding some new properties of essentially injective modules, we also characteristic some familiar rings through this module class as endomorphism rings, V-rings, Noetherian and semiartinian rings (presented in Chapter 3).

The new results of essentially injective modules we obtain, include the characteristics of essentially N-injective module (Theorem 2.2.2, Theorem 2.2.5, Theorem 2.2.8 and Theorem 2.2.12). Johnson-Wong have shown that for two right R-module M and N, M is N-injective if and only if $f(N) \leq M$ with R-homomorphism $f : E(N) \to E(M)$. We show that this is still true for M is essentially N-injective module if we add the condition $Ker(f) \leq^e E(N)$ (Theorem 2.2.2).

The problem of studying invariant modules under the endomorphism of its injective envelope is based on the results that Johnson and Wong presented in 1961, when they proved that the class module invariants under the endomorphism of its injective envelope is self-injective module class. Later, Dickson and Fuller (1969) examined the module invariants under other subsets of the endomorphism rings of its injectivec envelope, namely, the subset of automorphism rings. From these initial results, it is thought to expand injective modules in two ways, the first being expanded by adding or removing conditions in the original definition of injective modules (as expand into the essentially injective modules we show above), and the second is to expand by studying the invariant modules class under other subsets (such as isomorphisms) of the endomorphism ring of its injective envelope.

In 2013, Lee-Zhou presented the definition of automorphism-invariant modules, whereby, a module M is called *automorphism-invariant* if it is invariant under automorphism of its injective envelope. Theorem 2.2.9 of us shows the relationship between essentially self-injective modules and automorphism-invariant modules. We continue to prove the properties of direct sum, direct product of the essentially injective modules. In Theorem 2.2.12 is a version of a result of the authors Cartan-Eilenberg, Faith-Walker, Bass, Matlis, Papp and Kushan for essentially injective modules. Theorem 2.2.14 gives us the result: every right R-module is essentially injective module if and only if every singular R-module is a semisimple module, is an extension of Osofsky's Theorem.

The exchange property and finite exchange property of module were introduced in 1964 by the authors Crawley-Jónsson. The two questions that are asked are "How module will satisfy exchange property?", And "Which module when satisfy finite exchange property will also satisfy exchange property?". There have been many authors giving answers to different modules, and we have also answered both of these questions in the case that M is essentially self-injective modules in Theorem 2.2.9 and Theorem 2.2.11.

In Chapter 3, we study an extension of the projective modules, the small projective modules, which is the duality of the essentially injective modules, but we also consider the class automorphism-coinvariant modules, and find the relation between small self-projective and automorphism-coinvariant modules in Theorem 3.1.11. The results of the exchange property and the finite exchange property are also solved with small self-projective modules in Theorem 3.1.11 and Theorem 3.1.12. The later part of our chapter features some familiar rings via essentially injective modules and small projective modules.

The notion of V-rings was introduced by Faith in 1967 with the following definition, the ring R is called *right V-ring* if every simple right R-module is injective, or equivalent, every right ideal of R is the intersection of maximal right ideals. Theorem 3.2.3 proves that $R/Soc(R)$ is a right V-ring if and only if every right R-module is small projective, if and only if every simple right R-module is essentially injective.

The final section of Chapter 3 is devoted to the introduction to the rings for which every cyclic module is automorphism-coinvariant. We study this rings due to the relationship between the small projective modules and the automorphism-coinvariant modules in Theorem 3.1.11.

In 1969, Jain-Mohamed-Singh came up with the concept of *right q-rings*, rings in which every right ideal is self-injective. Studying the ring that every cyclic R-module is self-projective proposed by Koehler and calls *right q^*-rings.* We recall that a module M is called self-injective if M is invariant under any endomorphism of its injective envelope, or in other words, any homomorphism from a submodule of M to M extends to an endomorphism of M. From this property of self-injective modules, and from the definition of automorphism-invariant modules, Singh-Srivastava went on to propose a ring in which all right ideals are automorphism-invariant, called *right a-rings.* The three classes q-rings, q^*-rings and a-rings are characterized by many authors, give structure and gain many interesting properties.

Continuing this research, after introducing the concept of automorphism-coinvariant modules, Singh-Srivastava left a problem at the end of the article: Characteristics of the rings that every right cyclic R-module is automorphism-coinvariant module? This section in Chapter 3 has solved almost completely the above problem. The results on the relationship of rings are also focus in our study.

Chapter 1

Preliminaries

In this thesis, without further comment, R has always been assumed an associative ring with identity $1 \neq 0$ and all R-module are unitary right (or left) modules.

1.1 Some notations and definitions

We write $M_R({}_RM)$ to indicate that M is a right (left) R-module. In a specific context of the thesis, when not afraid of confusion on the side of module, for brevity we will write M instead of M_R. We use $A \leq M$ $(A < M)$ to mean that A is a submodule of M. If A is a direct summand of M, we will write $A \leq^{\oplus} M$. We use $\mathbb{M}_n(R)$ to mean that it is a matrix ring over R . If I is a set with $card(I) = \alpha$ and M is a module, we write a direct sum α photocopies of M is M^I or M^{α} , a direct product α photocopies of M is M^I or M^{α} . We use $Hom_R(M, N)$ to mean that set of homomorphism R-module from M to N, and $End_R(M)$ is the set of endomorphism of right R-module M.

Let M is a right R-module and $m_0 \in M$, then $m_0R = \{m_0r | r \in R\}$ is a submodule of M, and calls *cyclic submodule generated by* m_0 A module M is called *simple* if $M \neq 0$ and only have two submodules are 0 and M. M is *semisimple* if M is direct sum of simple submodule.

A submodule A of M is called *essential* or *large* in M if, for every non-zero submodule B of M , we have $A \cap B \neq 0$. Then M is called an *essential extension* of A and we write $A \leq^e M$. A monomorphism $f : M \to N$ is said to be *essential monomorphism* if $Im(f) \leq^e N$. Dual with essetial, a submodule A of M is called *superfluous* or *small* in M if, for every submodule $B \neq M$ of M , we have $A + B \neq M$ and written $A \ll M$. An epimorphism $f : M \to N$ is called *superfluous epimorphism* if $Ker(f) \ll M$. A module $M \neq 0$ is called *uniform* if every nonzero submodule of M is essential in M.

1.2 Injective modules, projective modules and some generalizations

Let M and N be two right R-modules. M is called N*-injective* if, every homomorphism $f : A \to M$, with A is a submodule of N, can be extended to homomorphism $g : N \to M$. M is called *quasi-injective* or *self-injective* if M is M-injective. M is called *injective* if M is N-injective for all N .

Let M is a right R-module, monomorphism $\alpha : M \to N$ is called an *injective hull (envelope)* of M if α is an essential monomorphism and N is injective module. We also call N is an injective hull of M and is notated $N = E(M)$. Every module M has an injective hull $E(M)$.

Dual to injective modules, we have concept projective module. Let M and N be two right R-modules. M is called N*-projective* if every homomorphism $f : M \to A$ and every epimorphism $g : N \to A$ there exists a homomorphism $h : M \to N$ such that $f = gh$. If M is M-projective then M is *quasi-projective* or *self-projective*, and if M is N-projective for all right R-module N then M is called *projective*.

1.3 Semisimple Artinian rings, perfect rings, semiperfect rings and some general cases

Definition 1.3.1. R is called *local* if R has a unique maximal right (or left) ideal; equivalently, if $R/J(R)$ is a division ring. R is *semilocal* if $R/J(R)$ is semisimple Artinian ring.

Definition 1.3.2. R is called *semiperfect* if R is semilocal and idempotents lift modulo $J(R)$. R là *right perfect* if R is semilocal and $J(R)$ is right T-transitive nilpotent.

Definition 1.3.3. R is called *regular* if for every $x \in R$, there exists $y \in R$ such that $x = xyx$, and R is *semiregular* if $R/J(R)$ is regular andidempotents lift modulo modulo $J(R)$.

Definition 1.3.5. R is called *right Artinian* (*right Noetherian*, respectively) if R_R is Artinian module (Noetherian module, respectively).

Definition 1.3.7. R is called *simple* if $R \neq 0$ and R have only two ideals which are 0 and R. R is *semisimple* if it is a direct sum of right (left) minimum ideals, equivalently, direct sum of simple rings, equivalently, R_R ($_RR$) is semisimple module.

Definition 1.3.13. A module M is called *semiartinian* if every nonzero factor module of M has nonzero socle. A ring R is called *right semiartinian ring* if R_R is semiartinian module.

Definition 1.3.15. R is called *right V-ring* if it satisfies the equivalent conditions:

(1) Every simple right R-module is injective.

(2) Every right ideal of R is the intersection of maximal right ideals.

Chapter 2

Essentially injectives module and generalizations

In this chapter, we mainly study an extension of injective modules, that is essentially injective modules. We present the properties of essentially injective modules and essentially self-injective modules, introduce the results of the relationship between class of essentially injective modules and class of automorphism-invariant modules.

2.1 Definitions and examples

Definition 2.1.1. Let M and N be two right R-modules.

(1) M is called *essentially N-injective* if every homomorphism with essential kernel from a submodule of N into M extends to N.
(2) M is called *essentially self (quasi)-injective* if M is essentially M-injective.
(3) M is called *essentially injective module* if M is essentially N-injective for all right modules N.
(4) Two modules M, N are called mutually essentially injective if M is essentially N-injective and N is essentially M-injective.
(5) A ring R is called *right essentially self-injective* if R_R is an essentially self-injective module.
We note that a module M is essentially injective if and only if M is essentially R_R-injective module.

Example 2.1.2.

(1) Let $n > 1$, we have $\mathbb{Z}_n$ is essentially self-injective $\mathbb{Z}$-module, hence $\mathbb{Z}_n$ is also essentially self-injective module.
(2) Every nonsingular module is essentially injective module.
(3) Let A be an injective module with exactly one non-zero proper submodule S. Let B be an indecomposable module that contains a simple submodule Y not isomorphic to S. Then B is essentially A-injective module and is not A-injective.
(4) For any prime p, consider the $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$. The module $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ is essentially $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$-injective, but is not essentially $(\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z})$-injective module, as it fails to be $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$-injective.

Definition 2.1.5. A module M is called *automorphism-invariant* if it is invariant under automorphisms of its injective envelope, it means, with every isomorphism $\alpha : E(M) \to E(M)$, we have $\alpha(M) \leq M$.

Definition 2.1.6. Let M and N be two modules. We say M is *automorphism N-invariant* if for any essential submodule A of N, any essential monomorphism $f : A \to M$ can be extended to some $g : N \to M$. M is called *automorphism-invariant* if M is automorphism M-invariant.

Definitions 2.1.5 and 2.1.6 have been shown to coincide when $M = N$.

2.2 The results relating to the essential injective modules and automorphism-invariant modules.

Lemma 2.2.1. *The following are equivalent for modules M and N:*

(1) *M is essentially N-injective.*

(2) *Every right R-module A, with every essential monomorphism $g : A \to N$ and a homomorphism $f : A \to M$ with the essential kernel, there exists a homomorphism $h : N \to M$ such that $f = hg$.*

We want to mention an important result of injectivity given by Johnson-Wong: With any two R-modules M and N, then M is N-injective if and only if $f(N) \leq M$ with R-homomorphism: $E(N) \to E(M)$ from the injective envelope of N into the injective envelope of M. Our following theorem is to extend the above result when module M is essentially N-injective, and we provide the equivalence conditions of M which is the essential N-injective through $J[E(N), E(M)]$.

Theorem 2.2.2. *The following conditions are equivalent for right R-modules M and N:*

(1) *M is essentially N-injective.*

(2) *For any R-homomorphism $\alpha : E(N) \to E(M)$ from the injective hull of N to the injective hull of M with the essential kernel, $\alpha(N) \leq M$.*

(3) *$\alpha(N) \leq M$ for all α in the radical $J[E(N), E(M)]$ of $Hom(E(N), E(M))$.*

From Theorem 2.2.2, letting $N = M$, above yields the following corollary.

Corollary 2.2.3. *The following conditions are equivalent for a right R-module M:*

(1) *M is essentially self-injective.*

(2) *$\alpha(M) \leq M$ for any endomorphism α of $E(M)$ with the essential kernel.*

(3) *$\alpha(M) \leq M$ for all $\alpha \in J(End(E(M)))$.*

Proposition 2.2.4. *Let M and N be two right R-modules. The following statements are holds:*

(1) *M is essentially N-injective if and only if M is essentially K-injective for every essential submodule K of N.*

(2) *If M is essentially N-injective and $K \cong N$ then M is essentially K-injective.*

(3) *Assume that $N = A \oplus B$, $M = C \oplus D$ and $\alpha : B \to D$ is a homomorphism with the essential kernel. If M is essentially N-injective then C is essentially A-injective.*

(4) *Let M_1 and M_2 be right R-modules and let $M := M_1 \oplus M_2$. Then M is essentially self-injective if and only if M_1 and M_2 are essentially self-injective, and mutually essentially injective.*

Theorem 2.2.5. *The following conditions are equivalent for a right R-module M:*

(1) *Every submodule of M is essentially self-injective.*

(2) *M is essentially self-injective and every essential submodule of M is invariant under every endomorphism of M with the essential kernel.*

(3) *Every essential submodule of M is essentially self-injective.*

Example 2.2.6.
(1) Let M be a module of which lattice of submodules are $0, M, N_1, N_2$, $N_1 \oplus N_2$ such that N_1 is not isomprphic to N_2 and the endomorphism ring of N_1 or N_2 is not isomprphic to $\mathbb{Z}_2$. Then M is essentially self-injective module but it is not automorphism-invariant.

(2) Let F_i be a filed and K_i be a proper subfield of F_i for any $i \geq 1$. Let R denote the set of all sequences in $\prod F_i$ with almost all entries in K_i. Then R is a commutative essentially self-injective ring that is not automorphism-invariant (if R_R is automorphism-invariant, then R is called an right automorphism-invariant ring).

(3) Every commutative integral domain is an essentially self-injective module over itself. Furthermore, if R is not a field, then R is not automorphism-invariant ring.

Let M and N be right R-modules. We denote

$$\Delta[M, N] = \{f \in Hom(M, N) : \ker(f) \leq^e M\}.$$

and

$$\Delta(M) = \{f \in End(M) : \ker(f) \leq^e M\}.$$

It is obvious that $\Delta(M)$ is an ideal of $End(M)$.

Theorem 2.2.8. *Let M be an essentially self-injective right R-module with an injective envelope $u : M \to E(M)$. Then*

(1) $\Delta(M) \subseteq J(End(M))$.

(2) *Idempotent elements of $End(M)$ lift modulo $\Delta(M)$.*

Theorem 2.2.9. *The following conditions are equivalent for a right R-module M with an injective envelope $u : M \to E(M)$:*

(1) *M is automorphism-invariant.*

(2) *M is essentially self-injective and $End(M)/\Delta(M)$ is stable left multiplication by units of* $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$.

In this case, M satisfies the exchange property.

C1-condition: Every submodule of M is essential in a direct summand of M.

C2-condition: Every submodule of M is isomorphic to a direct summand of M is itself a direct summand of M.

C3-condition: For any direct summand A and B of M such that $A \cap B = 0$, the submodule $A \oplus B$ is also a direct summand of M.

A module M is called *continuous* if it satisfies (C1) and (C2) conditions.

A module M is called *quasi-continuous* if it satisfies (C1) and (C3) conditions. Module quasi-continuous is also known as π-injective module.

Theorem 2.2.11. *The following conditions are equivalent for an essentially self-injective right R-module M*

(1) *M is quasi-continuous.*

(2) *$End(M)/\Delta(M)$ is stable left multiplication by idempotents of* $\dfrac{End(E(M))}{J(End(E(M)))}$.

In this case, if M satisfies the finite exchange property, then M satisfies the exchange property.

According to the ideas of Cartan-Eilenberg, Bass, Matlis, Papp and Kushan on characteristic of Noetherieean rings , it is required that "direct sum of right injective modules must be injective", we have used weaker assumptions to prove that "the direct sum of right essentially injective modules is essentially injective module if and only if the ring $R/Soc(R)$ is the right Noetherian ring". The theorem is stated as follows.

Theorem 2.2.12. *The following conditions are equivalent for a ring R:*

(1) *R satisfies ACC on essential right ideals of R (i.e., $R/Soc(R_R)$ is right Noetherian)*

(2) *Every direct sum of essentially injective right R-modules is essentially injective.*

(3) *If $K_0, K_1, \ldots, K_n \ldots$ are simple right modules then $\oplus_{\mathbb{N}} E(K_i)$ is essentially injective.*

(4) *$E^{(\mathbb{N})}$ is essentially injective for every essentially injective module E_R.*

From the theorem we have the following corollary.

Corollary 2.2.13. *The following conditions are equivalent for a ring R:*

(1) *R satisfies ACC on essential right ideals of R*

(2) *Every direct sum of injective right R-modules is essentially injective.*

In Osofsky's Theorem, a ring R is semisimple if and only if every cyclic right R-module is injective, or equivalent, every R-module is semisimple if and only if every cyclic right (left) R-module is injective. Extending this result, we show that every R-module is essentially injective if and only if every singular R-module is semisimple module.

Theorem 2.2.14. *The following conditions are equivalent for a ring R*

(1) *Every right R-module is essentially injective.*

(2) *Every cyclic right R-module is essentially injective.*

(3) *Every singular R-module is semisimple module.*

CONCLUSION OF CHAPTER 2

In this chapter, we have obtained some of the following results.

1. In the first part of the chapter, we obtain the characteristic of essentially N-injective modules (Lemma 2.2.1,Theorem 2.2.2), we also show that a module is essentially self-injective if it is invariant under its endomorphisms of its injective envelope with the essential kernel (Corollary 2.2.3).

2. We have also been able to expand on some new properties of essentially injective modules from known properties (Proposition 2.2.4, Proposition 2.2.5, Theorem 2.2.12). The relationship between the essentially self-injective, automorphism-invariant and modules satisfying the exchange property also gives us some interesting results (Theorem 2.2.9 and Theorem 2.2.11).

3. At the end of the chapter we obtain Theorem 2.2.14 which shows the relationship between essentially injective and singular modules.

Chapter 3

Small projective modules and some related rings

After studying the class of essentially injective modules and automorphism-invariant modules in Chapter 2, we continue to pay attention to their dual module class, which is the small projective and automorphism-coinvariant modules. The next part of our chapter featured these module on some familiar rings. The last part of the chapter deals with rings for which every cyclic module is automorphism-coinvariant, named a^*-rings.

3.1 Small projective and automorphism-coinvariant modules

Definition 3.1.1. *Let two right R-module M and N.*

(1) M is called *small N-projective* if every R-homomorphism $f : M \to K$ with $Im(f) \ll K$ and every epimorphism $p : N \to K$, there is a homomorphism $g : M \to N$ such that $p \circ g = f$.

(2) M is called *small self-projective* if M is small M-projective.

(3) M is called *small projective* if M is small N-projective for each right R-module N.

Example 3.1.2.

(1) From Definition 3.1.1 we have, if M is projective module then M is small projective, and if M is self-projective then M is small self-projective. The converse is not true in the general.

(2) A semisimple module is self-projective, so it is small self-projective.

(3) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ is small self-projective over ring $\mathbb{Z}$.

Definition 3.1.3. A right R-module M is called a *automorphism-coinvariant module* if whenever K_1 and K_2 are small submodules of M, then any epimorphism $\eta : M/K_1 \to M/K_2$ with small kernel lifts to an endomorphism φ of M.

Example 3.1.5.

(1) $\mathbb{Z}_2$ and $\mathbb{Z}_4$ are automorphism-coinvariant $\mathbb{Z}$-modules, but $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ is not a automorphism-coinvariant $\mathbb{Z}$-module.

(2) $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ is automorphism-coinvariant $\mathbb{Z}$-module,but $(2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ is not automorphism-coinvariant $\mathbb{Z}$-module.

(3) A module with no nonzero small submodule is easily seen to be a automorphism-coinvariant module. Thus all the semiprimitive modules belong to the family of automorphism-coinvariant modules (a module M is called *semiprimitive* if $Rad(M) = 0$.

(4) Let R be a ring given by $\begin{bmatrix} \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & \mathbb{F}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F}_2 \end{bmatrix}$ where $\mathbb{F}_2$ is the field of two elements. Take $M = e_{11}R$. Then $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M, \mathbb{F}_2)$ is an automorphism-coinvariant left R-module, so it is small projective module, but $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M, \mathbb{F}_2)$ is not self-projective.

Theorem 3.1.7. *Let R be a right perfect ring and M, N be right R-modules with projective covers $\pi_1 : P_1 \to M, \pi_2 : P_2 \to N$. The following conditions are equivalent:*

(1) *M is small N-projective.*

(2) *For any R-homomorphism $\alpha : P_1 \to P_2$ of right R-modules with the small image, $f(Ker(\pi_1)) \leq Ker(\pi_2)$.*

Letting $N = M$, above yields the following corollary.

Corollary 3.1.8. *The following conditions are equivalent for a right R-module M with a projective cover $\pi : P \to M$ over a right perfect ring R:*

(1) *M is small self-projective*

(2) *$Ker(\pi)$ is invariant under any endomorphism of P with the small image.*

Let M and N be right R-modules, we denote

$$\nabla[M, N] = \{f \in Hom(M, N) : Im(f) \ll N\}$$

and

$$\nabla(M) = \{f \in End(M) : Im(f) \ll M\}.$$

It is obvious that $\nabla(M)$ is an ideal of $End(M)$.

The next theorem we introduce to show the relationship between small self-projective and automorphism-coinvariant module.

Theorem 3.1.11. *The following conditions are equivalent for a right R-module M with a projective cover $p : X \to M$:*

(1) *M is automorphism-coinvariant.*

(2) *M is small self-projective and $End(M)/\nabla(M)$ is stable left multiplication by units of $End(X)/J(End(X))$.*

In this case, M satisfies the exchange property.

A right R-module M is called discrete if M satisfies the following conditions (D1) and (D2) .

D1-condition: If for any submodule N of M, there exists a direct summand K of M with $K \leq N$ and $N/K \ll M/K$,.

D2-condition: If N is a submodule of M such that M/N is isomorphic to a direct summand of M, then N is a direct summand of M.

The module M is called *quasi-discrete* if M satisfies (D1) and the following (D3) condition:

D3-condition: For every direct summands K and L of M with $M = K + L$, $K \cap L$ is a direct summand of M.

Dual with Theorem 2.2.11, we get the following result about discrete module.

Theorem 3.1.12. *The following conditions are equivalent for a small self-projective right R-module M over a right perfect ring R with a projective cover $p : X \to M$:*

(1) *M is quasi-discrete.*

(2) *$End(M)/\nabla(M)$ is stable left multiplication by idempotents of $\dfrac{End(X)}{J(End(X))}$.*

In this case, if M satisfies the finite exchange property, then M satisfies the exchange property.

3.2 Characteristics of essentially injective and small projective modules on the related rings

The most important property of V-rings is if R is a right V-ring then every simple right R-module is injective. We also characterize the properties of V-rings for $R/Soc(R_R)$ but via small projectivity and essentially injectivity.

Theorem 3.2.3. *The following conditions are equivalent for a ring R:*

(1) $R/Soc(R_R)$ *is a right V-ring.*

(2) *Every right R-module is small projective.*

(3) *Every finitely generated right R-module is small projective.*

(4) *Every cyclic right R-module is small projective.*

(5) *Every semisimple right R-module is small projective.*

(6) *Every simple right R-module is small projective.*

(7) *Every simple right R-module is essentially injective.*

The following results are presented to show the relationship between essentially injective, small projective, semisimple and singualar modules on a semiartinian ring.

Corollary 3.2.4. *The following conditions are equivalent for a right semiartinian ring R:*

(1) *R is right non-singular and $R/Soc(R_R)$ is a right V-ring.*

(2) *R is right non-singular and every (simple, semisimple) right R-module is small projective.*

(3) *R is right non-singular and every simple right R-module is essentially injective.*

(4) *Every singular simple right R-module is injective.*

3.3 Ring for which every cyclic module is automorphism-coinvariant

Definition 3.3.1.

(1) R is called *right q-ring* if every right ideal is self-injective.

(2) R is called *right q^*-ring* if every right cyclic module is self-projective.

(3) R is called *right a-ring* if every right ideal is automorphism-invariant

(4) R is called *right a^*-ring* if every cyclic module is automorphism-coinvariant

Example 3.3.2.

(1) Right q^*-rings and right V-rings are right a^*-rings.

(2) A semiperfect right V-ring is a right q^*-ring.

(3) Let R be a prime right noetherian right hereditary right V-ring which is not semisimple artinian (e.g., Cozzens's domain). Then R is a right a^*-ring which is not a right q^*-ring.

We give a structure of a^*-rings in the following theorem.

Theorem 3.3.4. *The following conditions are equivalent for a semiperfect ring R:*

(1) *R is a right a^*-ring.*

(2) *Any right ideal in $J(R)$ is a left T-module, where T is a subring of R generated by its units.*

Comment 3.3.5. A right q^*-ring and left q^*-ring is not coincide in general. For example, let

$$R = \{\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{c} \end{pmatrix} : \quad \bar{a} \in \mathbb{Z}_4; \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_2\},$$

then R is a semiperfect right q^*-ring which is not a left q^*-ring. But in this example, R is a right and left a^*-ring.

The next result gives us a decomposition of a^*-ring.

Theorem 3.3.6. *If R is a semiperfect right automorphism-invariant right a^*-ring, then R has a decomposition $R = S \oplus T$ such that*

(1) *S is a semisimple artinian ring;*

(2) *$T = e_1R \oplus e_2R \oplus \cdots \oplus e_nR$, where $e_1, e_2, \ldots, e_n$ are orthogonal local idempotents and $e_iR \ncong e_jR$ for all $i \neq j$.*

Theorem 3.3.7. *If R is a prime semiperfect right a^*-ring, then R is simple Artinian, or local.*

So when does a right a^*-ring be a semisimple Artinian ring? We answer this question in the following theorem.

Theorem 3.3.9. *The following conditions are equivalent for a ring R:*

(1) *R is semisimple Artinian.*

(2) *R is semiperfect and $\mathbb{M}_n(R)$ is a right a^*-ring for all $n > 1$.*

We state below the theorem that will play a key role later as we work towards the next results.

Theorem 3.3.10. *Let R be a semiperfect right a^*-ring. Then every essential right ideal is invariant under all units of R.*

From above theorem, we obtain a relationship between right a^*-rings and right a-rings in next corollary.

Corollary 3.3.11. *Let R be a semiperfect right a^*-ring. If R is a right automorphism-invariant, then R is a right a-ring.*

From Comment 3.3.5, one might suspect that a^*-rings are right and left symmetric. The following example shows that this is not so.

Example 3.3.12. (Example Björk) Let $\mathbb{F}$ be a field and assume that $\varphi : \mathbb{F} \to \bar{\mathbb{F}} \subseteq \mathbb{F}$ is an isomorphism defined by $a \mapsto \overline{a}$, where the subfield $\bar{\mathbb{F}} \neq \mathbb{F}$. Let R denote the left vector space on basis $\{1, t\}$, and make R into an $\mathbb{F}$-algebra by defining $t^2 = 0$ and $ta = \varphi(a)t$ for all $a \in F$. Note that R is a left Artinian ring and $J(R) = Rt = \mathbb{F}t$ is the only proper left ideal of R. Clearly, R is a left a^*-ring but that R is not a right a^*-ring.

In Theorem 3.3.10, if consider R is a semiperfect ring, if R is right a^*-ring then every essential right ideal is invariant under all units of R. The following lemma answer the reverse question.

Lemma 3.3.13. *Assume that R is a semiperfect ring and every essential right ideal is invariant under all units of R. If every small principally left ideal is a left annihilator, then R is a left a^*-ring.*

As we shown in Example 3.3.12, in general right a^*-ring and left a^*-ring is not coincide. The next results are indicated that right a^*-rings and left a^*-rings are coincide in some cases.

Theorem 3.3.14. *Assume that R is a semiperfect ring and every small principally left ideal is a left annihilator. If R is a right a^*-ring, then R is a left a^*-ring.*

The final theorem in this chapter is used to show the relationship between the cogenerator ring and right a^*- ring. The theorem is stated as follows.

Theorem 3.3.16. *If R is a right CS, right cogenerator and right a-ring, then R is a right and left a^*-ring.*

CONCLUSION OF CHAPTER 3

In this chapter, we have obtained some of the following results.

1. In the beginning of this chapter, we obtain the characteristic of small N-projective modules through the homomorphism on the kernel of the projective coves (Theorem 3.1.7), and obtain the same result for small self-projective modules in Corollary 3.1.8.

2. In the following section we introduce the results of automorphism-coinvariant modules. The relationship between small self-projective and automprphism-coinvariant modules is solved in Theorem 3.1.11, the result of modules satisfying the finite exchange property will also satisfy the exchange property given in Theorem 3.1.12. The characteristics of V-rings and semiartinian rings are presented in Theorem 3.2.3 and Corollary 3.2.4.

3. In section 3.3 on rings for which every right cyclic module is automorphism-coinvariant we have obtained important results. We describe the structure of a^* - rings by Theorem 3.3.4 as follows, a semiperfect ring R is a right a^*-ring if and only if any right ideal in $J(R)$ is a left T-module, where T is a subring of R generated by its units. Theorem 3.3.6 gives us the decomposition of a^* - rings. Because a prime a^*-ring is not necessarily a simple Artinian ring, we give Theorem 3.3.7 to confirm that if R is a prime semiperfect right a^*-ring, then R is simple Artinian, or local. We also answer the question of when the a^*-ring is a semisimple Artinian ring in Theorem 3.3.9. We proved in Theorem 3.3.14 that assume R is a semiperfect ring and every small principally left ideal is a left annihilator, if R is a right a^*-ring, then R is a left a^*-ring.

4. The remainder of our chapter presents the results of the relationship between the ring, in particular, the relationship between right a-rings and right a^*-rings introduced in Corollary 3.3.11, Theorem 3.3.16; the relationship between semiperfect and a^*-rings is stated in Lemma 3.3.13.

CONCLUSION

In this thesis, we obtained some main results as follows:

1. From the study of essentially injective modules, we have brought out some characteristics of essentially injective modules (Theorem 2.2.2, Proposition 2.2.4 and Proposition 2.2.5). In addition, we have obtained some results about the relationship between essentially injective and automorphism-invariant modules, namely Theorem 2.2.9. We also partially answered the question that Crawley-Jónsson asked about module satisfies the exchange property in the case that M is essentially injective module (Theorem 2.2.11) and when M is small projective module (Theorem 3.1.12).

2. We often refer to one of the important characteristics of the right Noetherian ring, that is, on the right Noetherian ring, the direct sum of the injective modules is injective. Theorem 2.2.12 gives us a similar result for essentially injective modules, that is, if $R/Soc(R)$ is the right Noether ring then the direct sum of essentially injective right R-modules is essentially injective. Another striking result in this section is Theorem 2.2.14, which we extended Osofsky's Theorem for essentially injective modules.

3. When studying the rings for which every right cyclic module is automorphism-coinvariant, we have solved almost the whole question that Singh-Srivastava has left, which is the description and characteristics of the class a^*-rings. We have given the structure of a^*-ring in Theorem 3.3.4, its decomposition is also introduced in Theorem 3.3.6. The results and examples to distinguish the related rings are also focused and proved in details.

LIST OF THE AUTHOR'S ARTICLES RELATED TO THE THESIS

1. Nguyen Thi Thu Ha, *Characteristics of small projective modules*, Journal of Science, Hue University (accepted 5-2020).

2. Kosan, T. M., Ha, N. T. T., Quynh, T. C., *Rings for which every cyclic module is dual automorphism-invariant*, J. Algebra and its Appl., **15** (5), (2016), 11pp.

3. Quynh, T. C., Abyzov, A. N., Ha, N. T. T., Yildirim, T., *Modules close to the automorphism-invariant and coinvariant*, J. Algebra and its Appl., **18** (12), (2019), 24pp.