ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HỒ SỸ CHƯƠNG

KHẢO SÁT CÁC TÍNH CHẤT, ĐỀ XUẤT CÁC TIÊU CHUẨN ĐAN RỐI VÀ ỨNG DỤNG CỦA MỘT SỐ TRẠNG THÁI PHI CỔ ĐIỂN HAI VÀ BA MODE MỚI

Ngành: **Vật lý lý thuyết và Vật lý toán**
Mã số: **9 44 01 03**

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ VẬT LÝ

Người hướng dẫn khoa học:

PGS.TS. TRƯƠNG MINH ĐỨC

Huế, 2022

Luận án được hoàn thành tại

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Trương Minh Đức

Phản biện 1:.....

.....

Phản biện 2:.....

.....

Phản biện 3:.....

.....

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Đại học Huế, họp tại Cơ quan Đại học Huế,
vào hồi … giờ … ngày … tháng … năm … 2022.

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện quốc gia;
- Trung tâm học liệu Đại học Huế;
- Trung tâm thông tin thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế.

PHẦN MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Từ sau khi Schrödinger đưa ra khái niệm rối lượng tử để giải thích nghịch lý EPR năm 1935, các nhà khoa học đã sớm có ý tưởng về một hệ thống thông tin lượng tử mà trung tâm của nó chính là các máy tính lượng tử. Điển hình trong đó là ý tưởng của Manin vào năm 1980 và Feynman năm 1982. Tính đến năm 2021, có nhiều trung tâm công nghệ đã nghiên cứu và chế tạo thành công các mô hình thử nghiệm máy tính lượng tử. Tất cả chúng đều thể hiện những ưu điểm vượt xa các siêu máy tính cổ điển mạnh nhất hiện nay. Tuy nhiên chúng vẫn là các mô hình thử nghiệm và còn bộc lộ nhiều vấn đề cần tiếp tục ngiên cứu và cải tiến. Các lĩnh vực thông tin lượng tử, máy tính lượng tử, viễn tải lượng tử hay lĩnh vực quang lượng tử nói chung đều dựa trên các đặc tính phi cổ điển của các trạng thái được sử dụng như tính chất đan rối, tính chất nén, ... Hiện nay, các lĩnh vực đó đang phát triển rất sôi động và đã có những bước tiến lớn. Do vậy việc tìm ra, nghiên cứu và ứng dụng các trạng thái có tính chất phi cổ điển tốt vào các lĩnh vực này đang thu hút sự quan tâm rất lớn từ các nhà nghiên cứu. Với hi vọng góp phần vào sự phát triển chung đó, chúng tôi chọn **"Khảo sát các tính chất, đề xuất các tiêu chuẩn đan rối và ứng dụng của một số trạng thái phi cổ điển hai và ba mode mới"** làm đề tài nghiên cứu của luận án.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu của đề tài là đề xuất được hai trạng thái phi cổ điển hai mode mới, xây dựng được tiêu chuẩn đan rối mới cho hệ hai mode, làm rõ được các tính chất của một số trạng thái phi cổ điển hai và ba mode mới, đánh giá được mức độ thành công của các quá trình viễn tải lượng tử với nguồn rối là các trạng thái phi cổ điển mới.

3. Đối tượng và phương pháp nghiên cứu

Đối tượng của nghiên cứu này là các trạng thái phi cổ điển hai và ba mode; các tính chất phi cổ điển bao gồm tính chất nén, phản kết chùm, phi Gauss và đan rối; các tiêu chuẩn đan rối và các mô hình viễn tải lượng tử. Đề tài luận án sử dụng phương pháp lượng tử hóa trường lần hai, phương pháp thống kê lượng tử, phương pháp tính số và vẽ đồ thị.

4. Điểm mới của đề tài

Đề tài luận án có một số điểm mới sau:

- Đưa ra được hai trạng thái phi cổ điển hai mode mới bằng phương pháp thêm và bớt photon định xứ và không định xứ;
- Đề xuất được tiêu chuẩn đan rối mới cho hệ hai mode từ toán tử hiệu pha dạng Hermite và toán tử hiệu số hạt của trường điện từ;
- Làm rõ tính chất phi cổ điển của các trạng thái hai và ba mode mới bao gồm các tính chất nén, phản kết chùm, phi Gauss và đan rối;
- Chỉ ra được sự thành công của các quá trình viễn tải lượng tử với nguồn đan rối được sử dụng là các trạng thái phi cổ điển hai mode mới.

PHẦN NỘI DUNG

Chương 1
CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1.1. Trạng thái Fock, trạng thái kết hợp và một số trạng thái phi cổ điển

1.1.1. Trạng thái kết hợp cặp và kết hợp cặp thêm, bớt photon

1.1.1.1. Trạng thái kết hợp cặp

Trạng thái kết hợp cặp (PCS) được Agarwal phát hiện và giới thiệu năm 1988, nó là trạng thái riêng của toán tử hủy cặp boson $\hat{a}\hat{b}$ và toán tử hiệu số photon giữa hai mode $\hat{Q} = \hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{a}^\dagger\hat{a}$ với trị riêng tương ứng ξ và q. Trong không gian các trạng thái Fock, trạng thái kết hợp cặp được biểu diễn dưới dạng

$$|\xi, q\rangle = \mathcal{N}_q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n, n+q\rangle_{ab} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \, |n, n+q\rangle_{ab}. \tag{1.1}$$

Hệ số chuẩn hóa $\mathcal{N}_q$ và hệ số C_n được xác định là

$$\mathcal{N}_q = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!}\right]^{-1/2}, C_n = \mathcal{N}_q \xi^n / \sqrt{n!(n+q)!}. \tag{1.2}$$

1.1.1.2. Trạng thái kết hợp cặp thêm hoặc bớt photon đơn mode

Trạng thái kết hợp cặp thêm photon đơn mode và kết hợp cặp bớt photon đơn mode được đưa ra bởi Chunqing và Hong năm 2000. Hai trạng thái này lần lượt được viết dưới dạng

$$\begin{aligned} |\xi, q; +m\rangle &= A_{mA} \hat{a}^{\dagger m} |\xi, q\rangle = A_{mqA} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n \sqrt{(n+m)! \, / n!}}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n+m, n+q\rangle, \\ |\xi, q; -m\rangle &= A_{mS} \hat{b}^m |\xi, q\rangle = A_{mqS} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n \sqrt{n! \, / (n+m)!}}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n, n+q-m\rangle, \end{aligned} \tag{1.3}$$

trong đó A_{mqA} và A_{mqS} là các hệ số chuẩn hóa.

1.1.1.3. Trạng thái kết hợp cặp thêm photon hai mode

Trạng thái kết hợp cặp thêm photon (PAPCS) được đưa ra bởi Hong và cộng sự năm 1999. Trạng thái này được tạo ra bằng cách thêm m photon vào hai mode của PCS và được viết dưới dạng

$$
\begin{aligned}
|\xi, q; m\rangle &= A_{qm}\hat{a}^{\dagger m}b^{\dagger m}\,|\xi, q\rangle \\
&= A_{qm}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n\sqrt{(n+q+m)!\,(n+m)!}}{n!(n+q)!}\,|n+m, n+q+m\rangle.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Năm 2009, Yuan và các cộng sự đã đề xuất trạng thái kết hợp cặp thêm photon tổng quát (GPAPCS) bằng cách thêm k photon lên mode a và thêm l photon lên mode b như sau

$$
|\xi, q, k, l\rangle = C'_q\hat{a}^{\dagger k}b^{\dagger l}\,|\xi, q\rangle = A_q\sum_{n=0}^{\infty}D_n\,|n+k, n+q+l\rangle. \tag{1.5}
$$

1.1.1.4. Trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon

Trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon (SPAPCS) được đưa ra bởi Thanh và các cộng sự bằng cách thêm chồng chất các photon vào hai mode của PCS. Trong không gian Fock SPAPCS có dạng

$$
|\Theta_{q;k,l}\rangle_{ab} = A_{qkl}\left(\hat{a}^{+k} + \varepsilon\hat{b}^{+l}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{[n!(n+q)!]^{1/2}}\,|n, n+q\rangle,
$$

trong đó A_{qkl} là hệ số chuẩn hóa. A_{qkl}, $\mathcal{C}_{in}$ được xác như sau

$$
A_{qkl}^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!}\left(\tfrac{(n+k)!}{n!} + \tfrac{\varepsilon^2(n+q+l)!}{(n+q)!} + 2\varepsilon\delta_{k+l,0}\right).
$$

1.1.2. Trạng thái kết hợp bộ ba và kết hợp bộ ba chồng chất thêm photon

1.1.2.1. Trạng thái kết hợp bộ ba

Trạng thái kết hợp bộ ba được định nghĩa là trạng thái riêng của bộ ba toán tử hủy $\hat{a}\hat{b}\hat{c}$ và hiệu các toán tử số hạt $\hat{N}_b - \hat{N}_a$ và $\hat{N}_c - \hat{N}_b$. Trong biểu diễn trạng thái số hạt, trạng thái kết hợp bộ ba có dạng

$$
|\Psi_{p,q}\rangle_{abc} = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(\xi)|n, n+p, n+p+q\rangle_{abc}, \tag{1.6}
$$

trong đó hệ số khai triển $c_n(\xi)$ được xác định

$$
c_n(\xi) = \frac{\mathcal{N}_{p,q}(r)\xi^n}{\sqrt{n!(n+p)!(n+p+q)!}},\ \mathcal{N}_{p,q}^{-2}(r) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n!(n+p)!(n+p+q)!}. \tag{1.7}
$$

1.1.2.2. Trạng thái kết hợp bộ ba chồng chất thêm photon

Trên cơ sở TCS, trạng thái kết hợp bộ ba chồng chất thêm photon STMPATCS được đề xuất bằng cách chồng chất các toán tử $\hat{a}^{\dagger h}, \hat{b}^{\dagger k}$ và $\hat{c}^{\dagger l}$ lên cả ba mode của TCS. Nó được viết dưới dạng

$$|\Phi_{p,q;h,k,l}\rangle_{abc} = N_{p,q;h,k,l}(r)(\varepsilon\hat{a}^{\dagger h} + \lambda\hat{b}^{\dagger k} + \sigma\hat{c}^{\dagger l})|\Psi_{p,q}\rangle_{abc}, \tag{1.8}$$

trong đó $|\Psi_{p,q}\rangle_{abc}$ là trạng thái kết hợp bộ ba được xác định ở (1.6), h, k, l là các số nguyên dương, $\varepsilon, \lambda, \sigma$ là các số thực và nằm trong đoạn $[-1, 1]$ và $N_{p,q;h,k,l}(r)$ là hệ số chuẩn hóa.

1.2. Một số tính chất của các trạng thái phi cổ điển

1.2.1. Tính chất nén

1.2.1.1. Nén tổng hai và ba mode

Hàm nén tổng hai mode có dạng

$$S(\phi) = \frac{4\left\langle (\Delta V(\phi))^2 \right\rangle - \left\langle \hat{N}_a + \hat{N}_b + 1 \right\rangle}{\left\langle \hat{N}_a + \hat{N}_b + 1 \right\rangle}, \tag{1.9}$$

trong đó $\hat{V}(\phi) = \frac{1}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger e^{i\phi} + \hat{a}\hat{b}e^{-i\phi}\right)$ là toán tử nén tổng. Trạng thái hai mode có tính nén tổng hai mode nếu $-1 \leq S(\phi) < 0$. Khi $S(\phi) = -1$, trạng thái bị nén tối đa, nhưng với $S \geq 0$ thì trạng thái không bị nén.

Xét hai toán tử bậc cao của trường boson ba mode sau

$$\hat{U} = \frac{\hat{a}^{\dagger m}\hat{b}^{\dagger m}\hat{c}^{\dagger m} + \hat{a}^m\hat{b}^m\hat{c}^m}{2}, \hat{V} = \frac{i(\hat{a}^{\dagger m}\hat{b}^{\dagger m}\hat{c}^{\dagger m} - \hat{a}^m\hat{b}^m\hat{c}^m)}{2}, \tag{1.10}$$

với m là số nguyên không âm. Hai toán tử này tuân theo quan hệ giao hoán $[\hat{U}, \hat{V}] = (i/2)\hat{W}$, trong đó $\hat{W} = \hat{a}^m\hat{b}^m\hat{c}^m\hat{a}^{\backslash \mathrm{dag} m}\hat{b}^{\dagger m}\hat{c}^{\dagger m} - \hat{a}^{\dagger m}\hat{b}^{\dagger m}\hat{c}^{\dagger m}\hat{a}^m\hat{b}^m\hat{c}^m$. Một trạng thái bị nén tổng ba mode bậc cao nếu thỏa mãn một trong hai điều kiện

$$S_U(m) \equiv \frac{4(\Delta\hat{X})^2 - \langle\hat{W}\rangle}{|\langle\hat{W}\rangle|} < 0, \tag{1.11}$$

$$S_V(m) \equiv \frac{4(\Delta\hat{V})^2 - \langle\hat{W}\rangle}{|\langle\hat{W}\rangle|} < 0, \tag{1.12}$$

trong đó $(\Delta\hat{f})^2 = \langle\hat{f}^2\rangle - \langle\hat{f}\rangle^2, f = \{U, V\}$. Các hàm $S_U(m)$ và $(S_V(m))$ càng âm thì mức độ nén càng cao.

1.2.1.2. Nén hiệu hai mode

Xét toán tử nén hiệu hai mode $\hat{W}(\phi) = \frac{1}{2}\left(\hat{a}\hat{b}^\dagger \mathrm{e}^{(i\phi)} + \hat{a}^\dagger \hat{b}\mathrm{e}^{(-i\phi)}\right)$. Một trạng thái được gọi là nén hiệu hai mode nếu

$$\left\langle \left(\Delta \hat{W}(\phi)\right)^2 \right\rangle < \frac{1}{4}\left|\left\langle \hat{N}_a \right\rangle - \left\langle \hat{N}_b \right\rangle\right|. \tag{1.13}$$

1.2.2. Tính chất phản kết chùm

1.2.2.1. Tính chất phản kết chùm đơn mode bậc nhất và bậc cao

Một trạng thái thể hiện tính phản kết chùm bậc m trong mode x nếu

$$A_x(m) \equiv \frac{\langle \hat{x}^{\dagger(m+1)}\hat{x}^{m+1}\rangle}{\langle \hat{x}^{\dagger m}\hat{x}^m\rangle\langle \hat{x}^\dagger \hat{x}\rangle} - 1 < 0. \tag{1.14}$$

Hàm $A_x(m)$ ở (1.14) cho biết mức độ phản kết chùm đơn mode bậc cao. $A_x(m)$ càng âm thì mức độ phản kết chùm đơn mode bậc cao càng lớn. Mức độ phản kết chùm đơn mode bậc cao là cực đại khi $A_x(m) = -1$.

1.2.2.2. Tính chất phản kết chùm hai mode bậc cao

Hàm phản kết chùm hai mode bậc cao có dạng

$$R_{ab}(u,v) = \frac{\left\langle N_a^{(u+1)} N_b^{(v-1)} \right\rangle + \left\langle N_a^{(v-1)} N_b^{(u+1)} \right\rangle}{\left\langle N_a^{(u)} N_b^{(v)} \right\rangle + \left\langle N_a^{(v)} N_b^{(u)} \right\rangle} - 1. \tag{1.15}$$

Một trạng thái có hai mode a và b có tính chất phản kết chùm hai mode bậc cao nếu hàm $R_{ab}(u,v)$ thỏa mãn điều kiện $R_{ab}(u,v) < 0$, trong đó $u \geq v \geq 1$, $N_x^{(l)} = \prod_{j=0}^{l-1}(N_x - j)$ và $x = \{a, b\}$. Giá trị của hàm $R_{ab}(u,v)$ càng âm thì độ phản kết chùm hai mode càng cao.

1.2.3. Tính chất phi Gauss

Một trạng thái có tính chất phi Gauss nếu hàm Wigner nhận các giá trị âm. Đối với trường đơn mode hàm Wigner có dạng

$$W(\alpha) = \frac{2\mathrm{e}^{2|\alpha|^2}}{\pi^2}\int d^2u \langle -u|\hat{\rho}|u\rangle \mathrm{e}^{2\alpha u^* - 2\alpha^* u}, \tag{1.16}$$

trong đó $|u\rangle$ là trạng thái kết hợp và $\hat{\rho}$ là toán tử mật độ.

Với trường hai mode, hàm Wigner được xác định là

$$W(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4\mathrm{e}^{2(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2)}}{\pi^4}\int d^2u_1 d^2u_2 \langle -u_2, -u_1|\hat{\rho}_{12}|u_1, u_2\rangle \tag{1.17}$$

$$\times \mathrm{e}^{2\alpha_1 u_1^* + 2\alpha_2 u_2^* - 2\alpha_1^* u_1 - 2\alpha_2^* u_2}, \tag{1.18}$$

với $|u_1, u_2\rangle = |u_1\rangle|u_2\rangle$ là trạng thái kết hợp hai mode.

Mở rộng cho trường ba mode, hàm Wigner có dạng

$$W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{8e^{2(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2)}}{\pi^6} \int d^2u_1 d^2u_2 d^2u_3 \times \langle -u_3, -u_2, -u_1|\hat{\rho}_{123}|u_1, u_2, u_3\rangle \times e^{2\alpha_1 u_1^* + 2\alpha_2 u_2^* + 2\alpha_3 u_3^* - 2\alpha_1^* u_1 - 2\alpha_2^* u_2 - 2\alpha_3^* u_3}, \tag{1.19}$$

với $|u_1, u_2, u_3\rangle \equiv |u_1\rangle|u_2\rangle|u_3\rangle$ là trạng thái kết hợp ba mode.

1.2.4. Tính chất đan rối

1.2.4.1. Một số tiêu chuẩn dò tìm đan rối

Ở đây chúng tôi chỉ giới thiệu vắn tắt một tiêu chuẩn đan rối cho hệ ba mode. Theo các tác giả Duc-Noh-Kim, một trạng thái ba mode bị rối hoàn toàn nếu vi phạm tất cả các bất đẳng thức sau

$$|\langle \hat{a}^m \hat{b}^n \hat{c}^l\rangle| \leq [\langle \hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^m\rangle\langle \hat{b}^{\dagger n}\hat{b}^n\rangle\langle \hat{c}^{\dagger l}\hat{c}^l\rangle]^{1/2}, \tag{1.20}$$

$$|\langle \hat{a}^m \hat{b}^n \hat{c}^l\rangle| \leq [\langle \hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^m\rangle\langle \hat{b}^{\dagger n}\hat{b}^n\hat{c}^{\dagger l}\hat{c}^l\rangle]^{1/2}, \tag{1.21}$$

$$|\langle \hat{a}^m \hat{b}^n \hat{c}^l\rangle| \leq [\langle \hat{b}^{\dagger n}\hat{b}^n\rangle\langle \hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^m\hat{c}^{\dagger l}\hat{c}^l\rangle]^{1/2}, \tag{1.22}$$

$$|\langle \hat{a}^m \hat{b}^n \hat{c}^l\rangle| \leq [\langle \hat{c}^{\dagger l}\hat{c}^l\rangle\langle \hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^m\hat{b}^{\dagger n}\hat{b}^n\rangle]^{1/2}. \tag{1.23}$$

Nếu xét điều kiện đan rối ở (1.20), một hàm đan rối bậc cao ba mode được xác định là

$$E_{m_a,m_b,m_c} = 1 - \frac{|\langle \hat{a}^{m_a}\hat{b}^{m_b}\hat{c}^{m_c}\rangle|}{\left(\langle \hat{N}_a^{(m_a)}\rangle\langle \hat{N}_b^{(m_b)}\rangle\langle \hat{N}_c^{(m_c)}\rangle\right)^{1/2}}. \tag{1.24}$$

Một trạng thái ba mode bị rối nếu $E_{m_a,m_b,m_c} < 0$.

1.2.4.2. Tiêu chuẩn định lượng độ đan rối

Để định lượng độ đan rối của các trạng thái phi cổ điển mới, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn entropy tuyến tính. Theo như Agarwal-Biswas, entropy tuyến tính có dạng

$$E_{\text{lin}} = 1 - \text{Tr}_x(\hat{\rho}_x^2). \tag{1.25}$$

Một trạng thái bị rối khi $0 < E_{\text{lin}} \leq 1$ và rối cực đại nếu $E_{\text{lin}} = 1$.

1.3. Một số giao thức viễn tải lượng tử

1.3.1. Giao thức đo các thành phần trực giao

Giao thức đo các thành phần trực giao được đề xuất đầu tiên bởi Vaidmand sau đó được phát triển bởi Braunstein và Kimble. Giao thức này được viết trong không

gian Fock bởi Hofmann và các cộng sự. Để đánh giá mức độ thành công của quá trình này, đại lượng độ trung thực trung bình được định nghĩa như sau

$$F_{\text{av}} = \int d^2\beta F(\beta)P(\beta) = \int d^2\beta |{}_T\langle\psi|\psi_{\text{out}}(\beta)\rangle_B|^2. \tag{1.26}$$

Với viễn tải cổ điển, độ trung thực trung bình đạt mức tối đa là 0.5. Vì vậy, trong viễn tải lượng tử biến liên tục, độ trung thực trung bình trên 0.5 được xem là thành công và giá trị cực đại ứng với $F_{\text{av}} = 1$.

1.3.2. Giao thức đo tổng số hạt và hiệu pha

Giao thức đo tổng số hạt và hiệu pha được đưa ra đầu tiên bởi Yu và các cộng sự và sau đó được phát triển bởi Cochrane và các cộng sự. Đối với giao thức này, độ trung thực trung bình được định nghĩa là

$$F_{\text{av}} = \sum_{q=0}^{\infty} F(q)P(q) = (N+1)\sum_{q=0}^{\infty}[P(q)]^2. \tag{1.27}$$

Độ trung thực trung bình trên 0.5 được xem là thành công và giá trị cực đại ứng với $F_{\text{av}} = 1$.

1.4. Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày một cách hệ thống các cơ sở lý thuyết quan trọng được áp dụng để nghiên cứu các vấn đề của luận án. Trong đó, chúng tôi đã trình bày khái quát các trạng thái cơ bản của trường điện từ, một số trạng thái phi cổ điển mà chúng tôi quan tâm nghiên cứu. Đồng thời, chúng tôi đã giới thiệu một số tính chất phi cổ điển như tính chất nén, tính chất phản kết chùm, tính chất phi Gauss và tính chất đan rối. Sau cùng chúng tôi giới thiệu hai giao thức viễn tải lượng tử là giao thức đo các thành phần trực giao và giao thức đo tổng số hạt và hiệu pha.

Chương 2
CÁC TRẠNG THÁI PHI CỔ ĐIỂN HAI MODE VÀ TIÊU CHUẨN ĐAN RỐI MỚI

2.1. Các trạng thái phi cổ điển hai mode mới

2.1.1. Trạng thái kết hợp cặp thêm và bớt photon hai mode

Bằng cách tác dụng k lần toán tử sinh $\hat{a}^\dagger$ vào mode a và l lần toán tử hủy $\hat{b}$ lên mode b của PCS $|\xi, q\rangle_{ab}$ chúng tôi thu được PAASTMPCS như sau

$$|\Psi_{q;k,l}\rangle_{ab} = B_{q;k,l}(\xi)\hat{a}^{\dagger k}\hat{b}^l|\xi, q\rangle_{ab} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n;k,h}(\xi)|n+k, n+h\rangle_{ab}, \tag{2.1}$$

trong đó k, l, q và $h = q - l$ là các số nguyên không âm và các hệ số được xác định bởi

$$C_{n;k,h}(\xi) = B_{q;k,l}(\xi)\,\xi^n \sqrt{\frac{(n+k)!}{(n!)^2\,(n+h)!}},\ B_{q;k,l}(\xi) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m}\,(m+k)!}{(m!)^2\,(m+h)!}\right)^{-1/2}.$$

Khi $k = 0$ và $h = q$ hoặc $k = l = 0$, PAASTMPCS quy về PCS.

2.1.2. Trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon và bớt photon

Trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon và bớt photon (SPAPSPCS) được tạo ra bằng cách tác dụng toán tử $(\hat{a}^{\dagger k} + \varepsilon \hat{b}^l)$ vào PCS và được viết như sau

$$\begin{aligned} |\Phi_{q;k,l}\rangle_{ab} &= A_{q,kl}(\xi)\left(\hat{a}^{\dagger k} + \varepsilon \hat{b}^l\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{[n!(n+q)!]^{1/2}}\,|n, n+q\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{2} C_{s,n}\,|n+a_s, n+b_s\rangle. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Trong (2.2), $\hat{a}^{\dagger k}$, $\hat{b}^l$ là toán tử sinh bậc k đối với mode a và hủy bậc l đối với mode b. k, l là các số nguyên không âm. q và l được chọn sao cho $q \geq l$. hệ số chuẩn hóa A_{qkl}, $C_{1,n}$, $C_{2,n}$, a_s và b_s, được xác định như sau

$$A_{q,kl}^{-2}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!}\left[\frac{(n+k)!}{n!} + \frac{\varepsilon^2(n+q)!}{(n+q-l)!} + 2\varepsilon|\xi|^k \cos(k\varphi)\delta_{k,l}\right]. \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &C_{1,n} = A_{q,kl}(\xi)\tfrac{\xi^n\sqrt{(n+a_1)!}}{n!\sqrt{(n+b_1)!}},\ \ C_{2,n} = A_{q,kl}(\xi)\tfrac{\varepsilon\xi^n}{\sqrt{(n+a_2)!(n+b_2)!}}, \\ &a_1 = k,\ \ b_1 = q,\ \ a_2 = 0,\ \ b_2 = q - l. \end{aligned} \tag{2.4}$$

trong đó a_1, a_2, b_1, và b_2 là các số nguyên âm.

2.2. Tiêu chuẩn đan rối mới

2.2.1. Toán tử pha và toán tử số hạt

Mục này giới thiệu về các toán tử pha của Dirac, Pegg-Bernett, Susskind-Glogower và Carruthers-Nieto.

2.2.2. Tiêu chuẩn đan rối mới

Để thiết lập được tiêu chuẩn đan rối mới, chúng tôi sử dụng toán tử hiệu pha $\hat{\Omega}$ của Carruthers và Nieto và hiệu số hạt $\hat{D}$ có dạng

$$\hat{\Omega} = \hat{C}_a\hat{C}_b + \hat{S}_a\hat{S}_b = \tfrac{1}{2}\left(\hat{E}_a\hat{E}_b^\dagger + \hat{E}_a^\dagger\hat{E}_b\right),\ \ \hat{D} = \hat{N}_a - \hat{N}_b. \tag{2.5}$$

Chúng tôi đã chứng minh được rằng một trạng thái hai mode bị rối giữa các mode nếu thỏa mãn hệ thức

$$0 < \Re = \frac{N_1 + E_1 - E_2 + E_3 - 1}{N_2 + E_1} \leq 1. \tag{2.6}$$

trong đó $\Re$ được gọi là hàm rối, $N_1,\ N_2,\ E_1,\ E_2$ và E_3 được xác định như sau

$$N_1 = 4\left(\left\langle \hat{N}_a \hat{N}_b \right\rangle - \left\langle \hat{N}_a \right\rangle \left\langle \hat{N}_b \right\rangle\right),\ N_2 = 2\left(\left\langle \hat{N}_a^2 + \hat{N}_b^2 \right\rangle - \left\langle \hat{N}_a \right\rangle^2 - \left\langle \hat{N}_b \right\rangle^2\right),$$
$$E_1 = \mathrm{Re}\left(\left\langle \hat{E}_a^{+2} \right\rangle \left\langle \hat{E}_b^2 \right\rangle\right),\ E_2 = \mathrm{Re}\left(\left\langle \hat{E}_a^{+2} \hat{E}_b^2 \right\rangle\right),\ E_3 = \left|\left\langle \hat{E}_a^\dagger \hat{E}_b \right\rangle\right|^2.$$

Nếu $\Re$ càng lớn thì mức độ rối càng cao, khi $\Re = 1$ trạng thái có mức độ rối cực đại, khi $\Re \leq 0$ trạng thái không bị rối. Rõ ràng khi xét tính âm hay dương của hàm rối ta có tiêu chuẩn dò tìm đan rối, khi xét giá trị hàm rối ($\Re \leq 1$) trong nữa khoảng $(0; 1]$ ta có tiêu chuẩn định lượng độ đan rối.

2.3. Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đã đề xuất được hai trạng thái phi cổ điển hai mode mới là trạng thái kết hợp cặp thêm và bớt photon hai mode (PAASTMPCS) và trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon và bớt photon (SPAPSPCS) bằng cách thêm và bớt photon định xứ và không định xứ lên hai mode của PCS. Chúng tôi cũng đã xây dựng được tiêu chuẩn đan rối mới cho hệ hai mode dựa vào toán tử hiệu số hạt và toán tử hiệu pha Hermite.

Chương 3

CÁC TÍNH CHẤT CỦA CÁC TRẠNG THÁI PHI CỔ ĐIỂN ĐA MODE MỚI

3.1. Tính chất phi cổ điển của trạng thái kết hợp cặp thêm và bớt photon hai mode

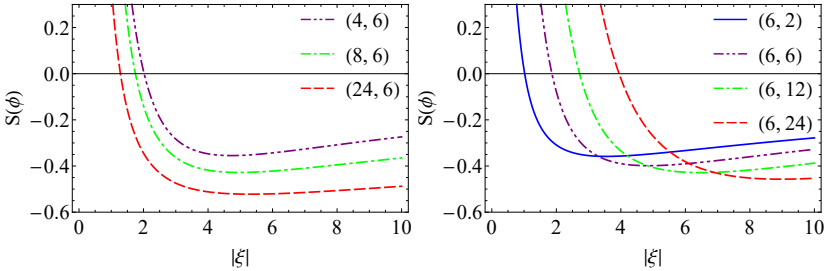
3.1.1. Tính chất nén tổng và nén hiệu hai mode

3.1.1.1. Tính chất nén tổng hai mode

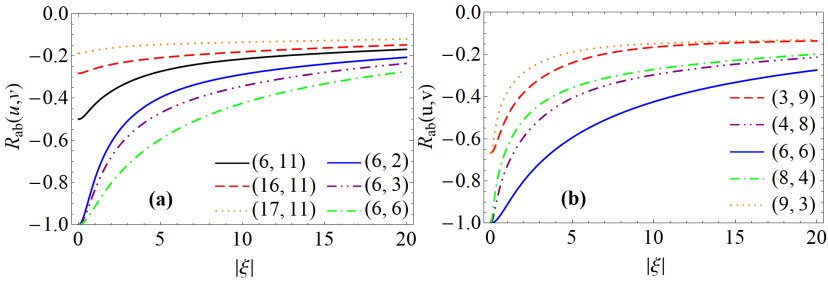
Hàm nén tổng hai mode của PAASTMPCS được xác định có dạng

$$\begin{aligned} S(\phi) = 2\Big[&\left(\mathrm{Re}\left(\left\langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{b}^{\dagger 2} \right\rangle \mathrm{e}^{i2\phi}\right) + \left\langle \hat{N}_a \hat{N}_b \right\rangle\right) \\ &- \left(\mathrm{Re}\left(\left\langle \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \right\rangle^2 \mathrm{e}^{i2\phi}\right) + \left|\left\langle \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \right\rangle\right|^2\right)\Big] . \left\langle \hat{N}_a + \hat{N}_b + 1 \right\rangle^{-1}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Trong Hình 3.1, các đồ thị cho thấy PAASTMPCS có tính chất nén tổng trong khi PCS thì không, tính chất nén tổng của PAASTMPCS tăng khi số photon thêm vào mode a tăng (k tăng) hoặc số photon bớt đi ở mode b giảm.



Hình 3.1: *Sự phụ thuộc của $S(\phi)$ theo biến $|\xi|$ và bộ tham số (k, h), hình trái $h = 6$ và k tăng dần, hình phải $k = 6$ và h tăng dần.*



Hình 3.2: *Các đồ thị của hàm $R_{ab}(u, v)$ theo biến $|\xi|$ và bộ tham số (k, h), khi chọn $u = 8$ và $v = 1$. Hình (a) là trường hợp chỉ thay đổi một trong hai đại lượng k hoặc h. Hình (b) là trường hợp $k+$ h không đổi.*

3.1.1.2. Tính chất nén hiệu hai mode

Kết quả giải tích cho thấy PAASTMPCS không có tính chất nén hiệu.

3.1.2. Tính chất phản kết chùm

Hàm phản kết chùm hai mode bậc cao đối với PAASTMPCS được xác định

$$\begin{aligned} R_{ab}(u,v) = &\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}((n+k)!)^2}{(n!)^2}\left(\frac{((n+k-u-1)!)^{-1}}{(n+h-v+1)!} + \frac{((n+h-u-1)!)^{-1}}{(n+k-v+1)!}\right)\right] \\ &\times\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m}((m+k)!)^2}{(m!)^2} \times \left(\frac{((m+k-u)!)^{-1}}{(m+h-v)!} + \frac{((m+h-u)!)^{-1}}{(m+k-v)!}\right)\right]^{-1} - 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Trong Hình 3.2, hình a cho thấy khi số photon thêm vào mode a giảm (k giảm) hoặc số photon bớt đi ở mode b giảm (l giảm hay h tăng) là tính chất phản kết chùm tăng, hình b cho thấy khi thêm và bớt photon vào hai mode sao cho tổng $k+h$ không đổi thì trường hợp $(k = h)$ cho mức độ phản kết chùm là cao nhất tại mọi giá trị của $|\xi|$.

Kết quả khảo sát còn cho thấy, tính chất phản kết chùm phụ thuộc vào tham số bậc u và v, khi v tăng tính chất phản kết chùm giảm, ngược lại khi u tăng thì tính

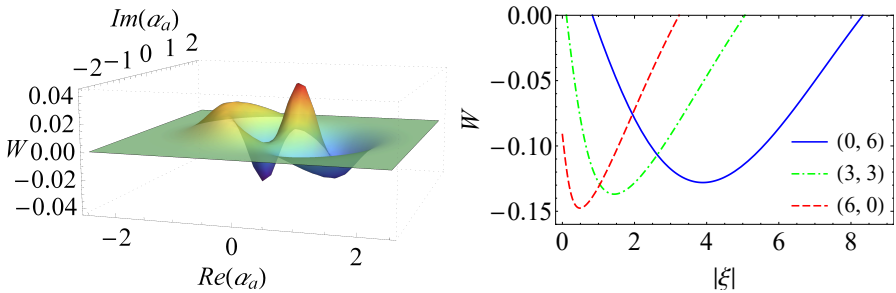
phản kết chùm tăng. Ngoài ra, việc thêm photon ($k > 0$) hoặc bớt photon ($l > 0$) đều làm cho PAASTMPCS có mức độ phản kết chùm cao hơn PCS.

3.1.3. Tính chất phi Gauss

Hàm Wigner của PAASTMPCS được xác định như sau

$$\begin{aligned} W = & \frac{4\mathrm{e}^{-2(|\alpha_a|^2+|\alpha_b|^2)}}{\pi^2}\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|\xi|^{2j}(j+k)!}{(j!)^2(j+h)!}\Big]^{-1} \\ & \times \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(4|\xi\alpha_a\alpha_b|)^{m+n}\cos[(m-n)(\varphi_a+\varphi_b-\varphi)]|2\alpha_a|^{2k}|\alpha_b|^{2h}}{m!n!(m+h)!(n+h)!} \\ & \times {}_2F_0[-n-k,-m-k;;-1/(2|\alpha_a|)^2] \\ & \times {}_2F_0[-n-h,-m-h;;-1/(2|\alpha_b|)^2], \end{aligned} \tag{3.3}$$

Trong Hình 3.3, hình bên trái cho thấy hàm Wigner của PAASTMPCS nhận các giá trị âm trong một số vùng của không gian pha. Do đó, PAASTMPCS là một trạng thái phi cổ điển và phi Gauss. Hình bên phải cho thấy việc thêm và bớt các photon vào các mode đóng vai trò quan trọng trong việc nâng cao tính phi Gauss của PAASTMPCS so với trạng thái gốc PCS.



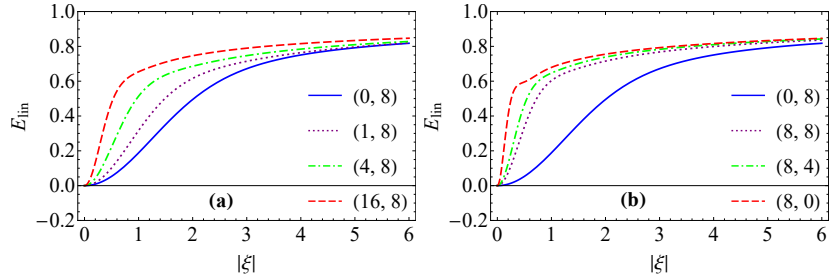
Hình 3.3: *Đồ thị hàm Wigner (W). Hình bên trái là đồ thị hàm W theo phần thực và phần ảo của α_a với $|\xi| = 0.2, \alpha_b = 0.5, \varphi = 0$, và $h = k = 1$. Hình bên phải là đồ thị hàm W theo biến $|\xi|$ với $|\alpha_a| = 0.29, |\alpha_b| = 0.20, \varphi_a + \varphi_b - \varphi = \pi$.*

3.1.4. Tính chất đan rối

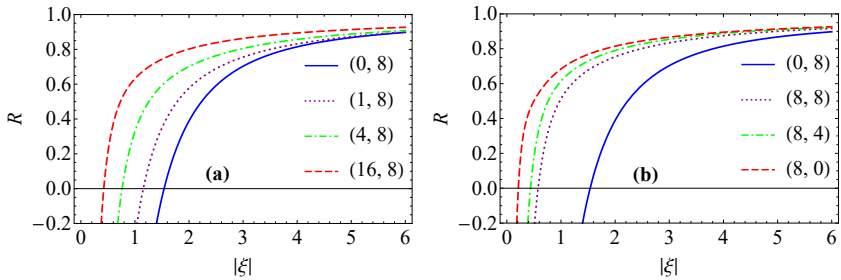
3.1.4.1. Định lượng độ đan rối bằng tiêu chuẩn entropy tuyến tính

Entropy tuyến tính E_{lin} của PAASTMPCS được xác định là

$$E_{\text{lin}} = 1 - \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\xi|^{2m}(m+k)!}{(m!)^2(m+h)!}\right)^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|\xi|^{2n}(n+k)!}{(n!)^2(n+h)!}\right)^2. \tag{3.4}$$



Hình 3.4: *Đồ thị hàm E_{lin} phụ thuộc vào biến $|\xi|$ và cặp tham số (k, h). Trong các hình (a), (b) đường $(0, 8)$ ứng với PCS, các đường còn lại ứng với PAASTMPCS.*



Hình 3.5: *Đồ thị hàm rối $\Re$ phụ thuộc vào $|\xi|$ và bộ tham số (k, h) với $q = 8$. Ở hình (a), $h = 8$ và k tăng dần. Ở hình (b) $k = 8$ và h giảm dần (l tăng dần).*

Trong Hình 3.4, các đường cong đối với PAASTMPCS luôn cao hơn PCS, do đó PAASTMPCS có mức độ đan rối cao hơn so với PCS. Các đường cong trong trong hình (a) và (b) cho thấy độ đan rối của PAASTMPCS được tăng cường nếu tăng số photon được thêm vào k hay tăng số photon bớt đi l tăng.

3.1.4.2. Định lượng độ đan rối bằng tiêu chuẩn đan rối mới

Hàm rối $\Re$ đối với PAASTMPCS được xác định như sau

$$\Re = 1 - \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |C_{n;k,h}(\xi)|^2 n^2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} |C_{n;k,h}(\xi)|^2 n\right)^2\right)^{-1}. \tag{3.5}$$

Trong Hình 3.5, các đồ thị cho thấy PAASTMPCS bắt đầu bị rối khi $|\xi|$ có giá trị bé, độ rối tăng nhanh và dễ dàng đạt giá trị trên 0.8 ngay khi giá trị $|\xi|$ đạt vài đơn vị. Độ rối của PAASTMPCS luôn cao hơn PCS. Các đồ thị cũng cho thấy khi tăng số photon được thêm vào mode a hay tăng số photon bị bớt đi ở mode b thì độ đan rối của PAASTMPCS được tăng cường, nhất là vùng $|\xi|$ nhỏ. Khi so sánh với tiêu chuẩn entropy tuyến tính, thấy tiêu chuẩn mới cho kết quả đáng tin cậy và có nhiều

điểm tương đồng với tiêu chuẩn entropy tuyến tính. Độ rối của trạng thái theo tiêu chuẩn mới thường cao hơn tiêu chuẩn entropy tuyến tính khi biên độ kết hợp không quá bé.

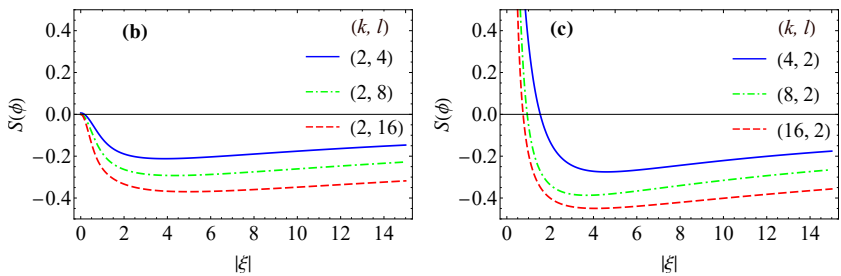
3.2. Tính chất phi cổ điển của trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon

3.2.1. Tính chất nén tổng hai mode

Hàm nén tổng hai mode $S(\phi)$ đối với SPAPCS được xác định có dạng

$$\begin{aligned} S(\phi) = 2\Bigg\{ & A_{qkl}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} \left[\frac{(n+k+2)!}{n!} \left(\frac{|\xi|^2 \cos^2 2\phi}{(n+1)(n+2)} + \frac{(n+k)(n+q)}{(n+k+1)(n+k+2)} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon^2 (n+q+l+2)!}{(n+q)!} \left(\frac{|\xi|^2 \cos^2 2\phi}{(n+q+1)(n+q+2)} + \frac{n(n+q+l)}{(n+q+l+1)(n+q+l+2)} \right) \right] \\ & - \left(1 + \cos^2 2\phi\right) \left(A_{qkl}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n+1}}{n!(n+q)!} \left[\frac{(n+k+1)!}{(n+1)!} + \frac{\varepsilon^2 (n+q+l+1)!}{(n+q+1)!} \right] \right)^2 \Bigg\} \\ & \times \left\{ 1 + A_{qkl}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} \left[\frac{(n+k)!(2n+q+k)}{n!} + \frac{\varepsilon^2 (n+q+l)!(2n+q+l)}{(n+q)!} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Các đồ thị trong Hình 3.6 cho thấy mức độ nén tổng hai mode của SPAPCS được tăng cường nếu tăng số photon thêm k hoặc tăng số photon bớt l.



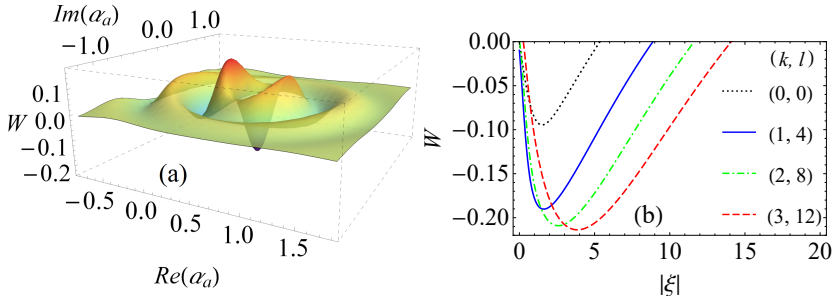
Hình 3.6: *Đồ thị hàm $S(\phi)$ phụ thuộc vào biến $|\xi|$ và bộ tham số (k, l) với $\varepsilon = 1, q = 2$.*

3.2.2. Tính chất phi Gauss

Hàm Wigner đối với SPAPCS có dạng

$$\begin{aligned} W = & \frac{4e^{-2|\alpha_a|^2 - 2|\alpha_b|^2}}{\pi^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{j,i=1}^{2} \frac{|\mathcal{C}_{i,n}| \, |\mathcal{C}_{j,m}| \, (4\,|\alpha_a \alpha_b|)^{m+n} |2\alpha_a|^{a_j + a_i} |2\alpha_b|^{b_j + b_i}}{\sqrt{(m+a_j)!(m+b_j)!(n+a_i)!(n+b_i)!}} \\ & \times {}_2F_0\left(-n-a_i, -m-a_j; ; \frac{-1}{|2\alpha_a|^2}\right) {}_2F_0\left(-n-b_i, -m-b_j; ; \frac{-1}{|2\alpha_b|^2}\right) \\ & \times \cos\left[(m-n+a_j-a_i)\,\varphi_a + (m-n+b_j-b_i)\,\varphi_b - (m-n)\,\varphi\right]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Trong Hình 3.7, hình (a) cho thấy sự tồn tại các giá trị của âm của hàm Wigner trong một số vùng của không gian pha nên SPAPCS là một trạng thái phi Gauss. Các đường cong trong hình (b) cho thấy độ phi Gauss của SPAPCS cao hơn PCS đồng thời càng nhiều photon được thêm vào hai mode của PCS, tính phi Gauss của SPAPCS càng tăng.



Hình 3.7: *Đồ thị hàm Wigner của SPAPCS được vẽ trong một số vùng của không gian pha, với các tham số được chọn là* $q = 1$, $\varepsilon = 1$, $|\beta| = 0,3$, $\varphi_a = \varphi_b = \varphi = 0$. *Trong (a),* W *dưới dạng hàm của phần thực và ảo của* α *với* $\xi = 4$ *và* $(k, l) = (3, 12)$. *Trong (b),* W *phụ thuộc vào biến* $|\xi|$ *và bộ tham số* (k, l) *với* $|\alpha| = 0.5$.

3.2.3. Tính chất đan rối

Hàm entropy tuyến tính E_{lin} đối với SPAPCS được xác định là

$$E_{\text{lin}} = 1 - A_{qkl}^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{4n}}{(n!)^2((n+q)!)^2} \left\{ \frac{((n+k)!)^2}{(n!)^2} + \frac{\varepsilon^4((n+q+l)!)^2}{((n+q)!)^2} + \frac{2\varepsilon^2|\xi|^{2l} n!(n+k+l)!}{((n+l)!)^2} + \frac{2\varepsilon^2|\xi|^{2k}(n+q)!(n+q+k+l)!}{((n+q+k)!)^2} \right\}. \tag{3.8}$$

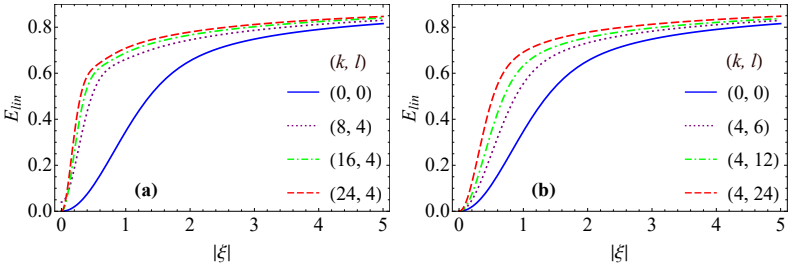
Trong Hình 3.8, các đường cong cho thấy độ rối của SPAPCS luôn cao hơn của PCS với mọi giá trị $|\xi|$ dương và nó được tăng cường nếu số photon thêm vào các mode của PCS tăng.

3.3. Tính chất phi cổ điển của trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon và bớt photon

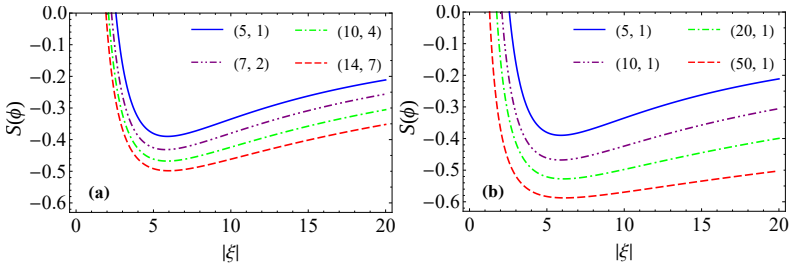
3.3.1. Tính chất nén tổng hai mode

Hàm nén tổng hai mode $S(\phi)$ của SPAPSPCS được xác định là

$$S(\phi) = \left\langle \hat{N}_a + \hat{N}_b + 1 \right\rangle^{-1} \left\{ 2\left(\text{Re}\left(\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^{\dagger 2} \right\rangle e^{i2\phi} \right) + \left\langle \hat{N}_a \hat{N}_b \right\rangle \right) - 2\left(\text{Re}\left(\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger} \right\rangle^2 e^{i2\phi} \right) + \left| \left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger} \right\rangle \right|^2 \right) \right\}. \tag{3.9}$$



Hình 3.8: *Đồ thị hàm E_{lin} phụ thuộc vào biến $|\xi|$ với $\varphi = \pi, \varepsilon = 1, q = 3$. Trong hình (a) và (b) đường cong (0, 0) tương ứng với PCS, các đường còn lại ứng với SPAPCS.*



Hình 3.9: *Đồ thị của hàm $S(\phi)$ phụ thuộc vào biến $|\xi|$ và cặp tham số (k, l) trong khi các tham số khác được giữ cố định là $\varepsilon = 1$, $\phi = 0$, và $q = 9$.*

Trong Hình 3.9, các đường cong cho thấy việc tăng số lượng photon được thêm vào mode a và số lượng photon bớt đi ở mode b có thể làm tăng độ nén của SPAPSPCS. Trong khi đó, trạng thái gốc PCS không có tính chất nén tổng hai mode. Bên cạnh đó, độ nén của SPAPSPCS được tăng cường mạnh khi số photon thêm vào mode a tăng.

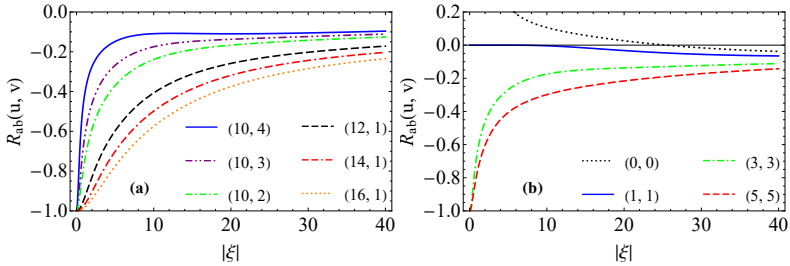
3.3.2. Tính chất phản kết chùm

Hàm phản kết chùm hai mode bậc cao đối với SPAPSPCS được xác định

$$R_{ab}(u,v) = -1 + \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s,r,i=1}^{2} \frac{C^*_{r,n+b_s-b_r} C_{s,n} (n+a_s)!(n+b_s)!\delta_{b_s-b_r,a_s-a_r}}{\left(n+a_s-u_i+(-1)^i\right)!\left(n+b_s-v_i+(-1)^{i-1}\right)!}}{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s,r,i=1}^{2} \frac{C^*_{r,n+b_s-b_r} C_{s,n} (n+a_s)!(n+b_s)!\delta_{b_s-b_r,a_s-a_r}}{(n+a_s-u_i)!(n+b_s-v_i)!}}, \tag{3.10}$$

trong đó $u_1 = v_2 = u$; $u_2 = v_1 = v$.

Trong Hình 3.10 (a), các đồ thị cho thấy mức độ phản kết chùm của SPAPSPCS sẽ tăng lên nếu tham số bậc v giảm hoặc thông số u tăng. Trong Hình 3.10 (b), mức độ phản kết chùm của SPAPSPCS cao hơn so với PCS và được tăng cường nếu số lượng photon được thêm vào mode a và bớt đi ở mode b cùng nhau tăng.

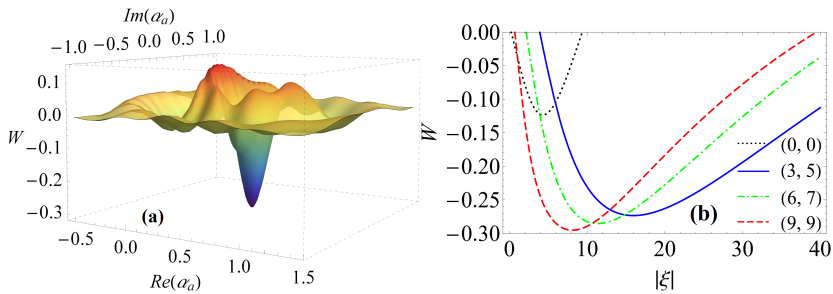


Hình 3.10: *Đồ thị của hàm $R_{ab}(u, v)$ phụ thuộc vào biến $|\xi|$ với các tham số được cố định là $\varepsilon = 1$, $\varphi = 0$ và $q = 9$. Ở hình (a), cặp tham số (u, v) thay đổi trong khi cặp tham số (k, l) được cố định là $k = l = 3$. Ở hình (b), cặp tham số (k, l) thay đổi trong khi cặp tham số (u, v) được cố định là $u = 10$ và $v = 3$.*

3.3.3. Tính chất phi Gauss

Hàm Wigner của SPAPSPCS được xác định có dạng

$$
\begin{aligned}
W = {} & \frac{4e^{-2\left(|\alpha_a|^2+|\alpha_b|^2\right)}}{\pi^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{r,s=1}^{2} \frac{|C_{s,n}|\,|C_{r,m}|\,|2\alpha_a|^{m+n+a_r+a_s}|2\alpha_b|^{m+n+b_r+b_s}}{\sqrt{(m+a_r)!(m+b_r)!(n+a_s)!(n+b_s)!}} \\
& \times \cos\left((m-n)(\varphi_a+\varphi_b-\varphi)\right)\cos\left((a_r-a_s)\varphi_a\right)\cos\left((b_r-b_s)\varphi_b\right) \\
& \times {}_2F_0\left(-n-a_s, -m-a_r; ; -1/|2\alpha_a|^2\right) \\
& \times {}_2F_0\left(-n-b_s, -m-b_r; ; -1/|2\alpha_b|^2\right). \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$



Hình 3.11: *Đồ thị hàm Wigner của SPAPSPCS với các tham số được cố định $\varepsilon = 1$; $q = 12$; $\varphi_a = \varphi_a = \varphi = 0$. Hình (a) là đồ thị hàm Wigner W trong không gian pha với các tham số được chọn là $\xi = 8$; $|\alpha_b| = 0.4$; $k = l = 9$. Hình (b) là các đường cong của hàm Wigner W phụ thuộc theo biến $|\xi|$, bộ tham số (k, l) thay đổi trong khi các tham số còn lại được giữ cố định là $|\alpha_a| = 0.5$; $|\alpha_b| = 0.4$.*

Ở Hình 3.11 (a), thấy rằng hàm Wigner nhận giá trị âm tại một số vùng nhất định trong không gian pha nên có thể khẳng định SPAPSPCS có tính chất phi Gauss. Ở

Hình 3.11 (b), các đồ thị này cho thấy khi chọn các tham số phù hợp, việc thêm và bớt photon vào các mode của PCS tạo ra SPAPSPCS có độ âm hàm Wigner cao hơn. Đặc biệt khi $k = l$ giá trị cựu tiểu của hàm W giảm, tức độ âm hàm Wigner tăng, do đó tính chất phi Gauss được tăng cường.

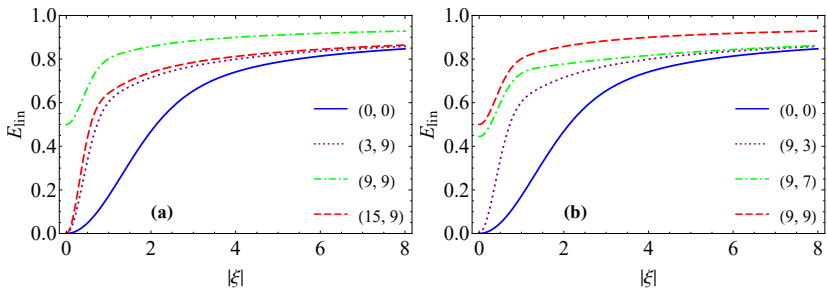
3.3.4. Tính chất đan rối

3.3.4.1. Định lượng độ đan rối bằng tiêu chuẩn entropy tuyến tính

Hàm E_{lin} đối với SPAPSPCS như sau

$$E_{\text{lin}} = 1 - \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{A_{q,kl}^4 |\xi|^{4n}}{(n!)^2((n+q)!)^2} \left\{ \frac{((n+k)!)^2}{(n!)^2} + \frac{\varepsilon^4((n+q)!)^2}{((n+q-l)!)^2} \right.$$
$$+ \frac{2\varepsilon^2|\xi|^{2l}(n+k)!}{(n+l)!} + \frac{2\varepsilon^2|\xi|^{2k}(n+q)!}{(n+q+k-l)!} + \delta_{k,l} 4\varepsilon^3|\xi|^{3k}$$
$$\left. \times \left[\frac{\cos(2k\varphi)}{2\varepsilon|\xi|^k} + \frac{\cos(k\varphi)(n+k)!}{\varepsilon^2|\xi|^{2k} n!} + \frac{\cos(k\varphi)\, n!}{(n+k)!} \right] \right\}. \tag{3.12}$$

Trong Hình 3.12, các đường cong cho thấy độ đan rối của SPAPSPCS luôn lớn hơn PCS, có thể đạt đến trên 90% ngay cả khi giá trị $|\xi|$ nhỏ và k hoặc l không lớn, nếu k hoặc l tăng thì độ đan rối của SPAPSPCS cũng tăng nhưng khi tăng đến trường hợp $k = l = q$ thì độ đan rối tốt nhất.



Hình 3.12: *Đồ thị của hàm E_{lin} phụ thuộc vào biến $|\xi|$ với cặp tham số (k, l) thay đổi trong khi các tham số khác được cố định là $\varepsilon = 1; \varphi = \pi$, $q = 9$. Trong đó đường $(0, 0)$ ứng với PCS, các đường còn lại là của SPAPSPCS.*

3.3.4.2. Định lượng độ đan rối bằng tiêu chuẩn đan rối mới

Khi khảo sát độ rối của SPAPSPCS bằng tiêu chuẩn đan rối mới và so sánh với bằng tiêu chuẩn entropy tuyến tính chúng tôi thấy rằng đây là trạng thái có độ đan rối rất mạnh. Cả hai tiêu chuẩn có kết quả khá tương đồng khi đều cho thấy độ rối của SPAPSPCS được tăng cường khi tăng số photon thêm vào và bớt đi ở hai mode của PCS, đồng thời độ đan rối tốt nhất khi $k = l = q$, tức là khi trạng thái

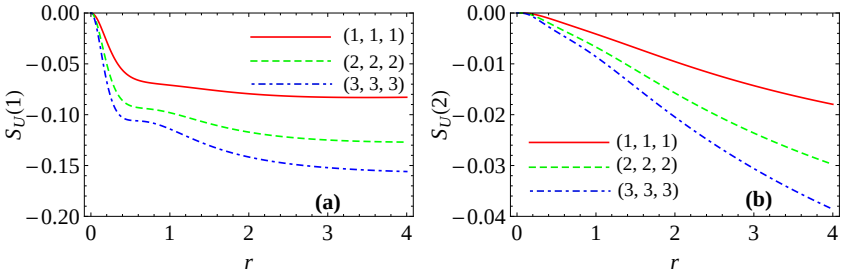
này có số photon ở hai mode cân bằng. Điểm khác biệt xảy ra ở vùng $|\xi|$ có giá trị nhỏ. Những điểm tương đồng và khác biệt đó cũng tương tự như khi áp dụng đối với PAASTMPCS.

3.4. Tính chất phi cổ điển bậc cao của trạng thái kết hợp bộ ba chồng chất thêm photon ba mode

3.4.1. Tính chất nén tổng ba mode bậc cao

Các hàm nén tổng ba mode bậc cao của STMPATCS, khi $\xi = r$ có dạng

$$S_U(m) = \frac{2C_{2m} - 4C_m^2 + 2D_{m,m,m}}{|B_{m,m,m} - D_{m,m,m}|}, S_V(m) = \frac{-2C_{2m} + 2D_{m,m,m}}{|B_{m,m,m} - D_{m,m,m}|}. \tag{3.13}$$



Hình 3.13: *Đồ thị hàm $S_U(m)$ phụ thuộc vào biến r và bộ tham số (h,k,l) khi $p = q = 0$ và $\varepsilon = \lambda = \sigma = 1$. Ở hình (a) $m = 1$, trong khi ở hình (b) $m = 2$.*

Trong Hình 3.13, các đồ thị cho thấy rằng mức độ nén được nâng cao bằng cách tăng h, k, l cũng như r với bất kỳ bậc m nào. Tuy nhiên, mức độ âm của $S_U(m)$ sẽ giảm nếu m có giá trị cao. Lưu ý rằng trạng thái kết hợp bộ ba không tồn tại sự nén tổng ba mode.

3.4.2. Tính chất phản kết chùm bậc cao

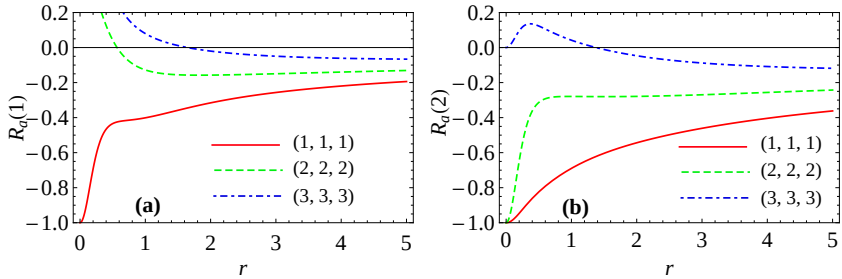
3.4.2.1. Tính chất phản kết chùm đơn mode bậc cao

Hàm phản kết chùm đơn mode bậc cao $R_x(m)$ của STMPATCS lần lượt theo các mode a, b, c có dạng

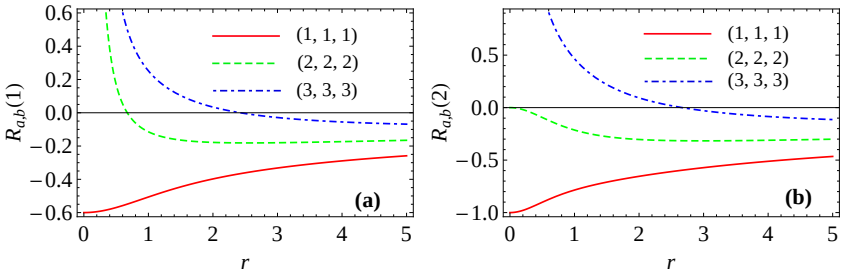
$$R_a(m) = \frac{D_{m+1,0,0}}{D_{m,0,0}D_{1,0,0}} - 1, R_b(m) = \frac{D_{0,m+1,0}}{D_{0,m,0}D_{0,1,0}} - 1, R_c(m) = \frac{D_{0,0,m+1}}{D_{0,0,m}D_{0,0,1}} - 1,$$

với $D_{i,j,w} = \langle \hat{a}^{\dagger i}\hat{a}^i\hat{b}^{\dagger j}\hat{b}^j\hat{c}^{\dagger w}\hat{c}^w \rangle$.

Trong Hình 3.14, kết quả cho thấy rằng mức độ phản kết chùm đơn mode bậc cao đối với mode a được tăng cường bằng cách tăng bậc m. Tuy nhiên, nó sẽ giảm nếu



Hình 3.14: *Đồ thị hàm $R_a(m)$ phụ thuộc vào biến r khi $p = q = 0$ và $\varepsilon = \lambda = \sigma = 1$. Hình (a) tương ứng với $m = 1$ và (b) ứng với $m = 2$.*



Hình 3.15: *Đồ thị hàm $R_{a,b}(m)$ phụ thuộc theo biến r và bộ tham số (h, k, l)khi $p = q = 0$ và $\varepsilon = \lambda = \sigma = 1$.*

tăng số photon h, k và l được thêm vào. Khi m nhỏ và h, k và l lớn, hàm $R_a(m)$ trở nên âm hơn trong vùng giá trị cao của r. Ngoài ra, khi m lớn, STMPATCS luôn tồn tại tính chất phản kết chùm đơn mode bậc cao.

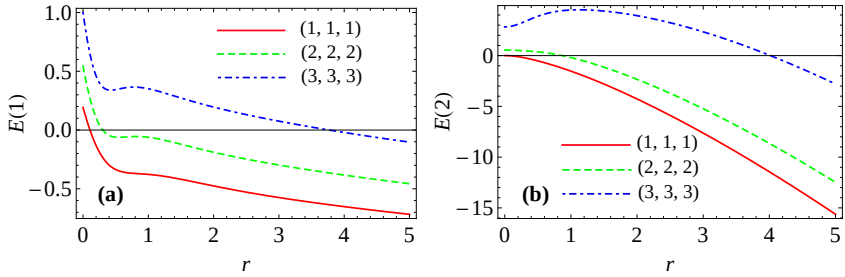
3.4.2.2. Tính chất phản kết chùm hai mode bậc cao

Đối với STMPATCS, chúng tôi xét hàm phản kết chùm bậc m lần lượt đối với hai mode a và b, a và c, b và c kết quả thu được như sau

$$\begin{aligned} &R_{a,b}(m) = \frac{D_{m+1,0,0}+D_{0,m+1,0}}{D_{m,1,0}+D_{1,m,0}} - 1,\ R_{a,c}(m) = \frac{D_{m+1,0,0}+D_{0,0,m+1}}{D_{m,0,1}+D_{1,0,m}} - 1, \\ &R_{b,c}(m) = \frac{D_{0,m+1,0}+D_{0,0,m+1}}{D_{0,m,1}+D_{0,1,m}} - 1, \end{aligned} \tag{3.14}$$

trong đó $D_{i,j,w} = \langle \hat{a}^{\dagger i}\hat{a}^{i}\hat{b}^{\dagger j}\hat{b}^{j}\hat{c}^{\dagger w}\hat{c}^{w}\rangle$.

Ở Hình. 3.15, các đồ thị cho thấy mức độ phản kết chùm hai mode bậc cao được tăng cường khi tăng bậc m hay khi r lớn. Tương tự như tính phản kết chùm đơn mode bậc cao, mức độ phản kết chùm hai mode bậc cao của STMPATCS bị giảm khi tăng số lượng photon được thêm vào trạng thái gốc TCS.



Hình 3.16: *Đồ thị hàm $E(m)$ phụ thuộc theo biến r và bộ tham số (h, k, l) với $p = q = 0$ và $\varepsilon = \lambda = \sigma = 1$.*

3.4.3. Tính chất đan rối ba mode bậc cao

Hàm rối $E(m)$ trong trường hợp $\xi = r$ đối với STMPATCS được xác định là

$$E(m) = \left(D_{m,0,0}D_{0,m,0}D_{0,0,m}\right)^{1/2} - C_m. \tag{3.15}$$

Trong Hình 3.16, các đồ thị chỉ ra rằng mức độ âm của $E(m)$ được tăng cường khi tăng m và giảm đi khi tăng h, k, l. Ngoài ra, khi giá trị r càng cao thì mức độ âm của $E(m)$ sẽ càng lớn.

3.5. Kết luận

Các trạng thái phi cổ điển hai và ba mode mới bao gồm PAASTMPCS, SPAP-SPCS, SPAPCS và STMPATCS đều có tính chất phi cổ điển mạnh. Các tính chất đó được tăng cường đáng kể so với trạng thái gốc PCS. Đặc biệt trong các tham số đó, tham số chỉ số lượng photon thêm và bớt đóng vai trò quan trọng trong việc tăng cường các tính chất phi cổ điển của các trạng thái mới.

Khi so sánh tính chất phi cổ điển bậc cao của trạng thái ba mode STMPATCS với trường hợp bậc một, chúng tôi thấy rằng trường hợp bậc cao có mức độ phi cổ điển cao hơn.

Kết quả khảo sát và so sánh cho thấy rằng, tiêu chuẩn đan rối mới có hiệu quả cao trong việc định lượng độ đan rối đối với trạng thái hai mode, kết quả khá tương đồng với tiêu chuẩn entropy tuyến tính. Ngoài ra, độ rối của trạng thái theo tiêu chuẩn mới thường cao hơn tiêu chuẩn entropy tuyến tính ở vùng biên độ kết hợp không quá nhỏ.

Chương 4

VIỄN TẢI LƯỢNG TỬ VỚI CÁC TRẠNG THÁI PHI CỔ ĐIỂN MỚI

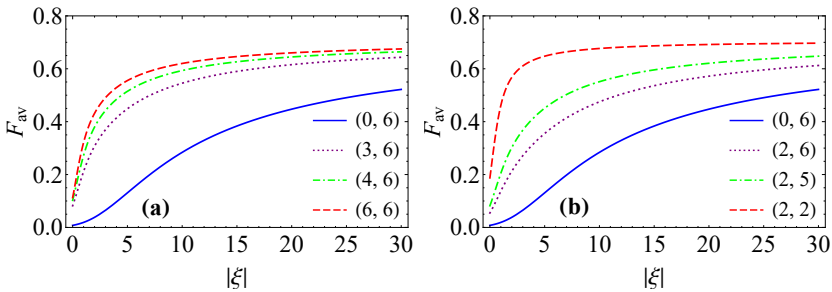
4.1. Viễn tải lượng tử với trạng thái kết hợp cặp thêm và bớt photon hai mode

4.1.1. Quá trình viễn tải với giao thức đo các thành phần trực giao

Độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải được xác định

$$F_{\rm av} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2j}(j+k)!}{(j!)^2\,(j+h)!}\right)^{-1} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2^{-(n+m+k+h+1)}|\xi|^{n+m}\,(n+m+k+h)!}{n!m!\,(n+h)!\,(m+h)!}. \quad (4.1)$$

Trong Hình 4.1, các đồ thị cho thấy độ trung thực trung bình đối với nguồn rối là PAASTMPCS luôn lớn hơn PCS, độ trung thực được tăng cường khi $|\xi|$ tăng, hoặc tăng số lượng photon được thêm vào và bớt đi đối với trạng thái gốc PCS. Bên cạnh đó, độ trung thực trung bình nhận giá trị lớn nhất trong trường hợp số lượng photon ở mode a và mode b bằng nhau, tức là $k = h = q - l$.



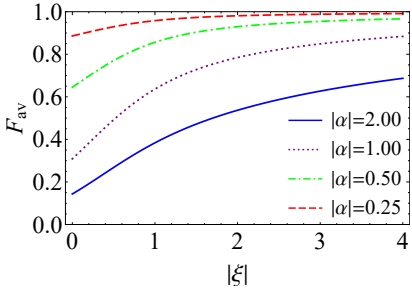
Hình 4.1: *Đồ thị hàm F_{av} phụ thuộc vào $|\xi|$ và bộ tham số (k, h) với $q = 6$, các đường $(k, h) = (0, 6)$ ứng với PCS, các đường nét đứt còn lại của PAASTMPCS.*

4.1.2. Quá trình viễn tải bằng giao thức đo tổng số hạt và hiệu pha

Độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải này được xác định bởi

$$F_{\rm av} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2j}\,(j+k)!}{(j!)^2\,(j+h)!}\right)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{|\xi|^n|\alpha|^{2(m-n)}\sqrt{(n+k)!}}{{\rm e}^{|\alpha|^2}n!\,(m-n)!\sqrt{(n+h)!}}\right)^2. \quad (4.2)$$

Trong Hình 4.2 các đồ thị cho thấy độ trung thực trung bình $F_{\rm av}$ tăng khi giảm $|\alpha|$



Hình 4.2: *F_{av} dưới dạng hàm của $|\xi|$ với $k = 4, h = 6$ và $|\alpha|$ thay đổi.*

và nó có thể tiến tới đơn vị nếu $|\alpha|$ bé và $|\xi|$ lớn. Ngoài ra kết quả khảo sát quá trình viễn tải còn cho thấy khi tăng số lượng photon được thêm vào và bớt đi ở cả hai mode a và b của PCS, độ trung thực trung bình $F_{\rm av}$ của PAASTMPCS được tăng cường và luôn cao hơn PCS.

4.2. Viễn tải lượng tử với trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon

Độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải lượng tử được xác định là

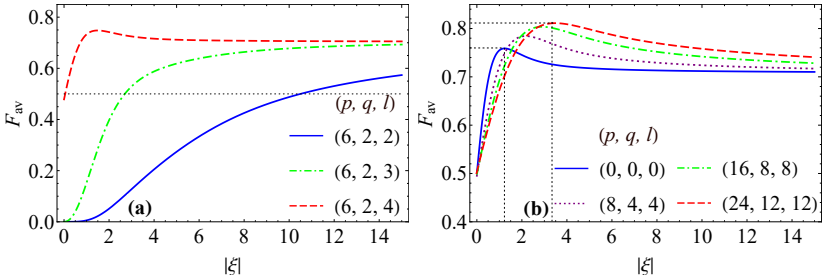
$$F_{\rm av} = A_{qkl}^2 \times \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2^{-(n+m+p-q+1)}|\xi|^{n+m+2(p-q)}}{\sqrt{n!m!(n+p)!(m+p)!}}\left(\frac{2^{-k}\,(n+m+k+p-q)!}{(n+p-q)!(m+p-q)!}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,\frac{\varepsilon^2|\xi|^{-2l}2^l(n+p)!(m+p)!\,(n+m+p-q-l)!}{(n+p-l)!(m+p-l)!\,(n+p-q-l)!\,(m+p-q-l)!}\right)\right\}. \tag{4.3}$$

Trong Hình 4.3, các đồ thị cho thấy độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải với nguồn rối SPAPCS cao hơn PCS đồng thời được tăng cường nếu tăng số photon bớt l với các tham số còn lại cố định (hình a). Đặc biệt khi p, q, l thỏa mãn $p = 2q = 2l$ và tăng dần thì giá trị cực đại của $F_{\rm av}$ cũng được tăng cường đáng kể và có thể đạt trên $0,85$ trong khi chỉ đạt tối đa $0,76$ đối với PCS.

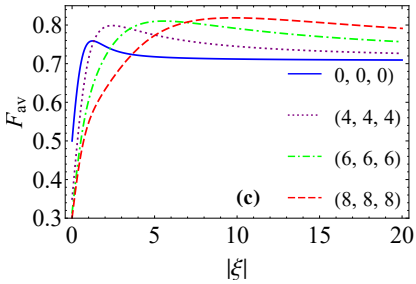
4.3. Viễn tải lượng tử với trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon và bớt photon

Độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải với nguồn rối SPAPSPCS có dạng

$$F_{\rm av} = |A_{q,kl}(\xi)|^2 \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{|\xi|^{n+m}\cos\left((n-m)\varphi\right)}{2^{n+m+q+1}n!m!}\left(\frac{2^{-k}\,(n+m+k+q)!}{(n+q)!(m+q)!}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2^l\varepsilon^2\,(n+m+q-l)!}{(n+q-l)!(m+q-l)!}+\frac{2\varepsilon\,(n+m+q)!\delta_{k,l}}{(n+q)!(m+q-k)!}\right)\right]. \tag{4.4}$$



Hình 4.3: *Đồ thị của độ trung thực trung bình F_{av} phụ thuộc vào biến $|\xi|$ và bộ tham số (p, q, l) với $p \geq q + l, \varepsilon = 0,25, k = 1$. Ở hình (a), tham số l tăng. Ở hình (b), $p = 2q = 2l$ và tăng dần.*



Hình 4.4: *Đồ thị hàm F_{av} phụ thuộc vào biến $|\xi|$ với bộ ba tham số (k, q, l) thay đổi nhưng thỏa mãn $(k = q = l)$ và các tham số khác được chọn cố định là $\varepsilon = 1; \varphi = 0$.*

Kết quả khảo sát cho thấy độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải được tăng cường khi tăng số photon thêm k và bớt l lên hai mode của PCS. Tuy nhiên khi k hoặc l tăng đến trường hợp $k = q = l$ độ trung thực cực đại sẽ tốt nhất như ở Hình 4.4. Khi đó, độ trung thục trung bình có thể đạt 82% và có thể cao hơn trong khi đối với PCS độ trung thực cực đại là 76%.

4.4. Kết luận

Kết quả cho thấy, cả ba trạng thái mới đều là nguồn rối tốt cho quá trình viễn tải, độ trung thực trung bình đối với cả ba trường hợp đều được tăng cường khi tăng số photon được thêm hoặc bớt hoặc cả thêm và bớt phù hợp vào các mode của PCS. Giao thức đo các thành phần trực giao phù hợp đối với SPAPCS và SPAPSPCS khi độ trung thực trung bình cực đại có thể đạt trên 80%. Trong khi đó, PAASTMPCS lại phù hợp với giao thức đo tổng số hạt và hiệu pha khi biên độ của trạng thái kết hợp được viễn tải là khá nhỏ, độ trung thực trung bình của quá trình có thể đạt đến xấp xỉ 100%.

PHẦN KẾT LUẬN CHUNG

Qua quá trình nghiên cứu và hoàn thành đề tài luận án, chúng tôi đã thu được một số kết quả mới sau đây.

Thứ nhất, chúng tôi đã đưa ra hai trạng thái phi cổ điển hai mode mới bằng phương pháp thêm và bớt photon. Đó là trạng thái kết hợp cặp thêm và bớt photon hai mode (PAASTMPCS) và trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon và bớt photon (SPAPSPCS).

Thứ hai, chúng tôi đã đề xuất được tiêu chuẩn đan rối mới cho hệ hai mode thông qua các toán tử hiệu pha có dạng Hermite và toán tử hiệu số hạt. Tiêu chuẩn đan rối mới được sử dụng một cách hiệu quả để dò tìm và định lượng độ đan rối của các trạng thái hai mode mới. Tiêu chuẩn mới có kết quả khảo sát độ đan rối cho các trạng thái hai mode khá tương đồng với tiêu chuẩn đan rối entropy tuyến tính. Ngoài ra, độ đan rối của trạng thái được khảo sát bằng tiêu chuẩn mới thường cao hơn tiêu chuẩn entropy tuyến tính.

Thứ ba, chúng tôi đã nghiên cứu các tính chất của hai trạng thái phi cổ điển mới được đề xuất trong luận án và hai trạng thái phi cổ điển hai và ba mode mới được đề xuất gần đây. Kết quả khảo sát cho thấy các trạng thái này là các trạng thái có tính phi cổ điển cao thông qua tính chất nén, tính phản kết chùm, tính phi Gauss và tính chất đan rối. Tính phi cổ điển của chúng được tăng cường bằng cách thay đổi số photon thêm, bớt vào các mode của trạng thái gốc. Bên cạnh đó, một số tính chất phi cổ điển trong trường hợp bậc cao thì tốt hơn bậc thấp, điển hình như đối với STMPATCS.

Thứ tư, chúng tôi đã ssử dụng các trạng thái hai mode mới bao gồm PAASTMPCS, SPAPCS và SPAPSPCS làm nguồn đan rối cho quá trình viễn tải lượng tử. Dựa vào độ trung thực trung bình, chúng tôi thấy rằng các quá trình viễn tải là rất thành công. Độ trung thực trung bình của các quá trình viễn tải được tăng cường và cao hơn đáng kể so với trường hợp sử dụng PCS bằng cách thêm, bớt số photon đối với hai mode của PCS.

Như vậy, chúng tôi đã hoàn thành tất cả các mục tiêu đã đề ra trong luận án. Luận án có thể được tiếp tục nghiên cứu và phát triển theo nhiều hướng khác nhau. Thứ nhất là tiếp tục nghiên cứu các tính chất phi cổ điển bậc cao của các trạng thái hai mode mới. Thứ hai là đề xuất các mô hình có thể tạo ra các trạng thái hai mode mới bằng thực nghiệm. Thứ ba là áp dụng tiêu chuẩn đan rối mới cho nhiều họ trạng thái để tìm ra các trạng thái đan rối mới có độ đan rối cao cũng như xác định được những họ trạng thái phù hợp với tiêu chuẩn mới này.

DANH MỤC CÁC BÀI BÁO ĐÃ CÔNG BỐ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Truong Minh Duc, **Ho Sy Chuong**, and Tran Quang Dat (2021). Detecting nonclassicality and non-Gaussianity by the Wigner function and quantum teleportation in photon-added-and- subtracted two modes pair coherent state. *Journal of Computational Electronics*, **20**, 2124-2134.

2. Ho Sy Chuong and Truong Minh Duc (2022). Sum squeezing, entanglement and quantum teleportation of the superposition of photon-added pair coherent state. *Journal of Physics: Conference Series*, **2269**, 012003(1-8).

3. Tran Quang Dat, **Ho Sy Chuong**, Dao Van Hung and Truong Minh Duc (2022). Higher-order nonclassicality in superposition of three-mode photon-added trio coherent states. *Communications in Physics*, **32**, 141-156.

4. Hồ Sỹ Chương, Hồ Ngọc Trung và Trương Minh Đức (2022). Nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái kết hợp cặp thêm và bớt photon hai mode. *Tạp chí Khoa học Đại học Huế: Khoa học Tự nhiên*, **131**, 75-83.

HUE UNIVERSITY
UNIVERSITY OF EDUCATION

HO SY CHUONG

INVESTIGATING THE PROPERTIES, PROPOSING THE ENTANGLEMENT CRITERIA, AND THE APPLYING OF SOME NEW TWO- AND THREE-MODE NONCLASSICAL STATES

Major: Theoretical physics and mathematical physics
Code: 9 44 01 03

SUMMARY OF DOCTORAL THESIS IN PHYSICS

Supervisors:

Assoc. Prof. Dr. TRUONG MINH DUC

Hue, 2022

The thesis was completed at

University of Education, Hue University

Supervisors: Assoc. Prof. Dr. Truong Minh Duc

Reviewer 1: .....

.....

Reviewer 2: .....

.....

Reviewer 3: .....

.....

The thesis is defended at Hue University's thesis grading committee, meeting at Hue University Agency,
at …… hour …… date …… month …… year 2022.

The thesis can be found at:

- National Library;
- Learning Resource Center, Hue University;
- Library Information Center, University of Education, Hue University.

PREAMBLE

1. Motivation

Since Schrödinger introduced the concept of quantum entanglement to explain the EPR paradox in 1935, scientists soon had the idea of a quantum information system whose centre was quantum computers. A typical example of this is the idea of Manin in 1980 and Feynman in 1982. As of 2021, there are many technology centers that have successfully researched and manufactured experimental models of quantum computers. All exhibit advantages far beyond the most powerful classical supercomputers available today. However, they are still experimental models and have many problems that need further research and improvement. The fields of quantum information, quantum computing, quantum teleportation, or the field quantum optics, in general, are all based on the nonclassical properties of the states used such as entanglement property, squeezing property. Currently, those fields are developing very vibrantly and have made great strides. Therefore, finding, studying, and applying states with good nonclassical properties to these fields is attracting great attention from researchers. With the hope of contributing to that common development, we choose *Investigating the properties, proposing the entanglement criteria, and the applying of some new two- and three-mode nonclassical states* as the research topic of the thesis.

2. Research objective

The objectives of the thesis are proposing two new two-mode nonclassical states, building a new entanglement criterion for two-mode systems, clarifying the properties of some new two- and three-mode nonclassical states, and evaluating the success of quantum teleportation processes with entangled resource being new nonclassical states.

3. Research subjects and methods

The subjects of the study are the two and three-mode nonclassical states; nonclassical properties including squeezing, antibunching, non-Gauss, and entanglement; entanglement criteria and quantum teleportation models. The methods of the study are the second field quantization method, the quantum statistics method, the numerical and graphing methods.

4. New points of the thesis

The thesis has some new points as follows:

- Proposing two new two-mode nonclassical states by the method of adding and subtracting local and non-local photons;
- Building a new entanglement criterion for two-mode systems from the phase difference operator with Hermite form and the particle difference operator of the electromagnetic field;
- Clarifying nonclassical properties of new two- and three-mode states including squeezing, antibunching, non-Gaussian and entanglement properties;
- Showing the degree of success of quantum teleportation processes with the entangled resource used as new two-mode nonclassical states.

CONTENTS

Chapter 1
THEORETICAL FOUNDATIONS

1.1 Fock state, coherent state and some nonclassical states

1.1.1 Pair coherent state and photon-added, photon- subtracted pair coherent states

1.1.1.1 Pair coherent state

The pair coherence state (PCS) was discovered and introduced by Agarwal in 1988, it is an eigenstate of the boson pair annihilation operator $\hat{a}\hat{b}$ and the photon difference operator between two modes $\hat{Q} = \hat{b}^{\dagger}\hat{b} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ with eigenvalues ξ and q respectively. In the space of Fock states, the pair coherent state is written in the form

$$|\xi, q\rangle = \mathcal{N}_q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n, n+q\rangle_{ab} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \, |n, n+q\rangle_{ab}. \tag{1.1}$$

The normalization coefficient $\mathcal{N}_q$ and the coefficient C_n are defined as

$$\mathcal{N}_q = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} \right]^{-1/2}, C_n = \mathcal{N}_q \xi^n / \sqrt{n!(n+q)!}. \tag{1.2}$$

1.1.1.2 Photon-added or photon-subtracted single-mode pair coherent states

The photon-added single-mode pair coherent state and photon-subtracted single-mode pair coherent state were introduced by Chunqing and Hong in 2000. These two states are written in the form, respectively

$$\begin{aligned} |\xi, q; +m\rangle &= A_{mA} \hat{a}^{\dagger m} |\xi, q\rangle = A_{mqA} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n \sqrt{(n+m)! \, / n!}}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n+m, n+q\rangle, \\ |\xi, q; -m\rangle &= A_{mS} \hat{b}^{m} |\xi, q\rangle = A_{mqS} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n \sqrt{n! \, / (n+m)!}}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n, n+q-m\rangle, \end{aligned} \tag{1.3}$$

where A_{mqA} and A_{mqS} are normalization coefficients.

1.1.1.3 Photon-added two-mode pair coherent states

The photon-added pair coherent state (PAPCS) was introduced by Hong et al. 1999. This state is produced by adding m photons to the two modes of the PCS and is written as

$$\begin{aligned} |\xi, q; m\rangle &= A_{qm} \hat{a}^{\dagger m} b^{\dagger m} |\xi, q\rangle \\ &= A_{qm} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n \sqrt{(n+q+m)! \, (n+m)!}}{n!(n+q)!} |n+m, n+q+m\rangle. \end{aligned} \tag{1.4}$$

In 2009, Yuan et al. proposed a generalized added-photon pair coherent state (GPAPCS) by adding k photons to mode a and adding l photons to mode b of the PCS as follows

$$|\xi, q, k, l\rangle = C'_q \hat{a}^{\dagger k} b^{\dagger l} |\xi, q\rangle = A_q \sum_{n=0}^{\infty} D_n |n+k, n+q+l\rangle. \tag{1.5}$$

1.1.1.4 Superposition of photon-added pair coherent state

The superposition photon-added pair coherent state (SPAPCS) was introduced by Thanh et al. by adding non-local photons to two modes of the PCS. In the Fock space, the SPAPCS has form

$$|\Theta_{q;k,l}\rangle_{ab} = A_{qkl} \left(\hat{a}^{+k} + \varepsilon \hat{b}^{+l}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{[n!(n+q)!]^{1/2}} |n, n+q\rangle,$$

where A_{qkl} is the normalization coefficient and determined as follows

$$A_{qkl}^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} \left(\frac{(n+k)!}{n!} + \frac{\varepsilon^2 (n+q+l)!}{(n+q)!} + 2\varepsilon \delta_{k+l,0}\right).$$

1.1.2 Trio coherent states and superposition of three-mode photon-added trio coherent states

1.1.2.1 Trio coherent states

The trio coherent state is defined as the eigenstate of the triple annihilation operator $\hat{a}\hat{b}\hat{c}$ and the particle number difference operators $\hat{N}_b - \hat{N}_a$ and $\hat{N}_c - \hat{N}_b$. In the particle number states representation, the trio coherent state has the form

$$|\Psi_{p,q}\rangle_{abc} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi) |n, n+p, n+p+q\rangle_{abc}, \tag{1.6}$$

where the expansion coefficient $c_n(\xi)$ is defined

$$c_n(\xi) = \frac{\mathcal{N}_{p,q}(r)\xi^n}{\sqrt{n!(n+p)!(n+p+q)!}}, \mathcal{N}_{p,q}^{-2}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n!(n+p)!(n+p+q)!}. \tag{1.7}$$

1.1.2.2 Superposition of three-mode photon-added trio coherent states

Based on the TCS, the superposition photon three-mode trio coherent state (STM-PATCS) is proposed by superimposing the operators $\hat{a}^{\dagger h}, \hat{b}^{\dagger k}$ and $hatc^{\dagger l}$ on three modes of the TCS. It is written in the form

$$|\Phi_{p,q;h,k,l}\rangle_{abc} = N_{p,q;h,k,l}(r)(\varepsilon \hat{a}^{\dagger h} + \lambda \hat{b}^{\dagger k} + \sigma \hat{c}^{\dagger l}) |\Psi_{p,q}\rangle_{abc}, \tag{1.8}$$

where $|\Psi_{p,q}\rangle_{abc}$ is the TCS and defined in Eq. (1.6), h, k, l are positive integers, $\varepsilon, \lambda, \sigma$ are reals and lie in $[-1, 1]$, and $N_{p,q;h,k,l}(r)$ is normalized factor.

1.2 Some properties of nonclassical states

1.2.1 Squeezing property

1.2.1.1 Two-mode sum squeezing property

Two-mode sum squeezing function was proposed and defined as follows

$$S(\phi) = \frac{4\left\langle (\Delta V(\phi))^2 \right\rangle - \left\langle \hat{N}_a + \hat{N}_b + 1 \right\rangle}{\left\langle \hat{N}_a + \hat{N}_b + 1 \right\rangle}, \tag{1.9}$$

where $\hat{V}(\phi) = \frac{1}{2}\left(\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \, \mathrm{e}^{i\phi} + \hat{a}\hat{b}\mathrm{e}^{-i\phi}\right)$ is the sum squeezing operator. A two-mode state has two-mode sum squeezing property if $-1 \leq S(\phi) < 0$. When $S(\phi) = -1$ the state is maximally squeezed, but for $S \geq 0$ the state isn't squeezed.

Considering the two higher-order operators of the following three-mode boson field

$$\hat{U} = \frac{\hat{a}^{\dagger m}\hat{b}^{\dagger m}\hat{c}^{\dagger m} + \hat{a}^m \hat{b}^m \hat{c}^m}{2}, \; \hat{V} = \frac{i(\hat{a}^{\dagger m}\hat{b}^{\dagger m}\hat{c}^{\dagger m} - \hat{a}^m \hat{b}^m \hat{c}^m)}{2}, \tag{1.10}$$

with m being the non-negative integer. These two operators obey the commutative relation $[\hat{U}, \hat{V}] = (i/2)\hat{W}$, where $\hat{W} = \hat{a}^m \hat{b}^m \hat{c}^m \hat{a}^{\dagger m}\hat{b}^{\dagger m}\hat{c}^{\dagger m} - \hat{a}^{\dagger m}\hat{b}^{\dagger m}\hat{c}^{\dagger m}\hat{a}^m \hat{b}^m \hat{c}^m$. A state has the higher-order three-mode sum squeezing if it is satisfied

$$S_U(m) \equiv \frac{4(\Delta \hat{X})^2 - \langle \hat{W} \rangle}{|\langle \hat{W} \rangle|} < 0, \tag{1.11}$$

$$S_V(m) \equiv \frac{4(\Delta \hat{V})^2 - \langle \hat{W} \rangle}{|\langle \hat{W} \rangle|} < 0, \tag{1.12}$$

where $(\Delta \hat{f})^2 = \langle \hat{f}^2 \rangle - \langle \hat{f} \rangle^2, f = \{U, V\}$. The functions $S_U(m)$ and $S_V(m)$ are more negative, the squeezed degree is the higher.

1.2.1.2 Two-mode difference squeezing

Considering $\hat{W}(\phi) = \frac{1}{2}\left(\hat{a}\hat{b}^\dagger \mathrm{e}^{(i\phi)} + \hat{a}^\dagger \hat{b}\mathrm{e}^{(-i\phi)}\right)$ is the two-mode difference squeezing operator. A state has the two-mode difference squeezing property if

$$\left\langle \left(\Delta \hat{W}(\phi)\right)^2 \right\rangle < \frac{1}{4}\left|\left\langle \hat{N}_a \right\rangle - \left\langle \hat{N}_b \right\rangle\right|. \tag{1.13}$$

1.2.2 Antibunching property

1.2.2.1 Single-mode antibunching and high-order single-mode antibunching properties

A state exhibits m-order antibunching property in mode x if

$$A_x(m) \equiv \frac{\langle \hat{x}^{\dagger(m+1)}\hat{x}^{m+1} \rangle}{\langle \hat{x}^{\dagger m}\hat{x}^m \rangle \langle \hat{x}^\dagger \hat{x} \rangle} - 1 < 0. \tag{1.14}$$

The function $A_x(m)$ in equation (1.14) also indicates the degree of the high-order single-mode antibunching property. The more negative the $A_x(m)$ is, the more obvious the single-mode high-order antibunching becomes. The degree of the high-order single-mode antibunching is maximum when $A_x(m) = -1$.

1.2.2.2 High-order two-mode antibunching property

High-order two-mode antibunching function has the form

$$R_{ab}(u,v) = \frac{\left\langle N_a^{(u+1)} N_b^{(v-1)} \right\rangle + \left\langle N_a^{(v-1)} N_b^{(u+1)} \right\rangle}{\left\langle N_a^{(u)} N_b^{(v)} \right\rangle + \left\langle N_a^{(v)} N_b^{(u)} \right\rangle} - 1. \tag{1.15}$$

A state with two modes a and b has high-order two-mode antibunching property if the function $R_{ab}(u,v)$ satisfies the condition $R_{ab}(u,v) < 0$, where $u \geq v \geq 1$, $N_x^{(l)} = \prod_{j=0}^{l-1}(N_x - j)$ and $x = \{a, b\}$. The more negative value of the function $R_{ab}(u,v)$, the higher antibunching degree.

1.2.3 Non-Gaussian property

A state has non-Gaussian property if its Wigner function takes negative values. For a single-mode field, the Wigner function has the form

$$W(\alpha) = \frac{2\mathrm{e}^{2|\alpha|^2}}{\pi^2} \int d^2u \langle -u|\hat{\rho}|u\rangle \mathrm{e}^{2\alpha u^* - 2\alpha^* u}, \tag{1.16}$$

where $|u\rangle$ is the coherent state and $\hat{\rho}$ is the density operator.

For the two-mode field, the Wigner function is defined as

$$W(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4\mathrm{e}^{2(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2)}}{\pi^4} \int d^2u_1 d^2u_2 \langle -u_2, -u_1|\hat{\rho}_{12}|u_1, u_2\rangle \tag{1.17}$$

$$\times \mathrm{e}^{2\alpha_1 u_1^* + 2\alpha_2 u_2^* - 2\alpha_1^* u_1 - 2\alpha_2^* u_2}, \tag{1.18}$$

where $|u_1, u_2\rangle = |u_1\rangle|u_2\rangle$ is the two-mode coherent state.

Extending to the three-mode field, the Wigner function has the form

$$\begin{aligned} W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = & \frac{8\mathrm{e}^{2(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2)}}{\pi^6} \int d^2u_1 d^2u_2 d^2u_3 \\ & \times \langle -u_3, -u_2, -u_1|\hat{\rho}_{123}|u_1, u_2, u_3\rangle \\ & \times \mathrm{e}^{2\alpha_1 u_1^* + 2\alpha_2 u_2^* + 2\alpha_3 u_3^* - 2\alpha_1^* u_1 - 2\alpha_2^* u_2 - 2\alpha_3^* u_3}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

where $|u_1, u_2, u_3\rangle \equiv |u_1\rangle|u_2\rangle|u_3\rangle$ is the three-mode coherent state.

1.2.4 Entanglement property

1.2.4.1 Some entanglement detection criteria

Here we only briefly introduce an entanglement criterion for three-mode systems. According to the authors Duc-Noh-Kim, a three-mode state is completely entangled if

all of the following inequalities are violated:

$$|\langle \hat{a}^m \hat{b}^n \hat{c}^l \rangle| \leq [\langle \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^m \rangle \langle \hat{b}^{\dagger n} \hat{b}^n \rangle \langle \hat{c}^{\dagger l} \hat{c}^l \rangle]^{1/2}, \tag{1.20}$$

$$|\langle \hat{a}^m \hat{b}^n \hat{c}^l \rangle| \leq [\langle \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^m \rangle \langle \hat{b}^{\dagger n} \hat{b}^n \hat{c}^{\dagger l} \hat{c}^l \rangle]^{1/2}, \tag{1.21}$$

$$|\langle \hat{a}^m \hat{b}^n \hat{c}^l \rangle| \leq [\langle \hat{b}^{\dagger n} \hat{b}^n \rangle \langle \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^m \hat{c}^{\dagger l} \hat{c}^l \rangle]^{1/2}, \tag{1.22}$$

$$|\langle \hat{a}^m \hat{b}^n \hat{c}^l \rangle| \leq [\langle \hat{c}^{\dagger l} \hat{c}^l \rangle \langle \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^m \hat{b}^{\dagger n} \hat{b}^n \rangle]^{1/2}. \tag{1.23}$$

If we consider the entanglement condition at (1.20), a three-mode high-order entanglement function is defined as

$$E_{m_a,m_b,m_c} = 1 - \frac{|\langle \hat{a}^{m_a} \hat{b}^{m_b} \hat{c}^{m_c} \rangle|}{\left(\langle \hat{N}_a^{(m_a)} \rangle \langle \hat{N}_b^{(m_b)} \rangle \langle \hat{N}_c^{(m_c)} \rangle\right)^{1/2}}. \tag{1.24}$$

A three-mode state is entangled if $E_{m_a,m_b,m_c} < 0$.

1.2.4.2 Entanglement quantification criterion

To quantify the entanglement degree of new nonclassical states, we use the linear entropy criterion. According to Agarwal-Biswas, linear entropy has the form

$$E_{\text{lin}} = 1 - \text{Tr}_x(\hat{\rho}_x^2). \tag{1.25}$$

A state is entangled when $0 < E_{\text{lin}} \leq 1$ and is maximum entangled if $E_{\text{lin}} = 1$.

1.3 Some quantum teleportation protocols

The orthogonal quadrature components measurements protocol was first proposed by Vaidmand and then developed by Braunstein and Kimble. This protocol is written in Fock space by Hofmann et al. To measure the success of this teleportation process, we use the average fidelity that is defined as follows:

$$F_{\text{av}} = \int d^2\beta F(\beta) P(\beta) = \int d^2\beta |_T\langle \psi | \psi_{\text{out}}(\beta) \rangle_B|^2. \tag{1.26}$$

With classical teleportation, the average fidelity is maximum out at 0.5. Therefore, in continuous-variable quantum teleportation, an average fidelity above 0.5 is considered successfully, and the maximum value corresponds to $F_{\text{av}} = 1$.

The number sum and phase difference measurements protocol was proposed by Yu et al. and later developed by Cochrane et al. The average fidelity of this protocol is defined as

$$F_{\text{av}} = \sum_{q=0}^{\infty} F(q) P(q) = (N+1) \sum_{q=0}^{\infty} [P(q)]^2. \tag{1.27}$$

The average fidelity above 0.5 is considered successfully, and the maximum value corresponds to $F_{\text{av}} = 1$.

1.4 Summary

In this chapter, we have systematically presented theoretical foundations applied to research the thesis's issues. In it, we presented an overview of the basic states of the electromagnetic field and some nonclassical states that we are interested in studying. In addition, we also presented some nonclassical properties such as squeezing, antibunching, non-Gaussian, and entanglement. Finally, we have introduced the orthogonal quadrature components measurements protocol and the number sum and phase difference measurements protocol.

Chapter 2
THE NEW TWO-MODE NONCLASSICAL STATES AND ENTANGLEMENT CRITERION

2.1 The new two-mode nonclassical states

2.1.1 Photon-added-and-subtracted two modes pair coherent state (PAASTMPCS)

The PAASTMPCS is created by acting k times of creation operator $\hat{a}^\dagger$ on mode a and l times of annihilation operator $\hat{b}$ on mode b of the PCS $|\xi, q\rangle_{ab}$ as

$$|\Psi_{q;k,l}\rangle_{ab} = B_{q;k,l}(\xi)\hat{a}^{\dagger k}\hat{b}^l\,|\xi, q\rangle_{ab} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n;k,h}(\xi)|n+k, n+h\rangle_{ab} \tag{2.1}$$

where k, l, q and $h = q - l$ are non-negative integers, $B_{q;k,l}(\xi)$ is determined by

$$C_{n;k,h}\left(\xi\right) = B_{q;k,l}\left(\xi\right)\xi^n\sqrt{\frac{(n+k)!}{(n!)^2\,(n+h)!}},\ B_{q;k,l}\left(\xi\right) = \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\xi|^{2m}\,(m+k)!}{(m!)^2\,(m+h)!}\right)^{-1/2}.$$

When $k = 0$ and $h = q$, or $k = l = 0$, the PAASTMPCS is reduced to the PCS.

2.1.2 Superposition of photon-added and photon-subtracted pair coherent states

Superposition of photon-added and photon-subtracted pair coherent states (SPAPSPCS) is produced by acting $(\hat{a}^{\dagger k} + \varepsilon\hat{b}^l)$ on the PCS and written as follows

$$\begin{aligned}|\Phi_{q;k,l}\rangle_{ab} &= A_{q,kl}(\xi)\left(\hat{a}^{\dagger k} + \varepsilon\hat{b}^l\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{\left[n!(n+q)!\right]^{1/2}}\,|n, n+q\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{2} C_{s,n}\,|n+a_s, n+b_s\rangle. \end{aligned}\tag{2.2}$$

In (2.2), $\hat{a}^{\dagger k}$, $\hat{b}^l$ is the k-order creation operator for mode a and l-order annihilation operator for mode b. k, l are non-negative integers, q and l are chosen such that $q \geq l$.

Coefficients A_{qkl}, $C_{1,n}$, $C_{2,n}$, a_s and b_s, are defined as follows

$$A_{q,kl}^{-2}(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!}\left[\frac{(n+k)!}{n!}+\frac{\varepsilon^2(n+q)!}{(n+q-l)!}+2\varepsilon|\xi|^k\cos(k\varphi)\delta_{k,l}\right]. \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}&C_{1,n}=A_{q,kl}(\xi)\frac{\xi^n\sqrt{(n+a_1)!}}{n!\sqrt{(n+b_1)!}},\ \ C_{2,n}=A_{q,kl}(\xi)\frac{\varepsilon\xi^n}{\sqrt{(n+a_2)!(n+b_2)!}},\\&a_1=k,\ \ b_1=q,\ \ a_2=0,\ \ b_2=q-l.\end{aligned} \tag{2.4}$$

where a_1, a_2, b_1, and b_2 are negative integers.

2.2 The new entanglement criterion

2.2.1 Phase operator and particle number operator

This subsection introduces the phase operators of Dirac, Pegg-Bernett, Susskind-Glogower and Carruthers-Nieto.

2.2.2 The new entanglement criterion

To establish a new criterion, we use the phase difference operator $\hat{\Omega}$ by Carruthers-Nieto and the particle number difference operator $\hat{D}$ of the form

$$\hat{\Omega}=\hat{C}_a\hat{C}_b+\hat{S}_a\hat{S}_b=\tfrac{1}{2}\left(\hat{E}_a\hat{E}_b^\dagger+\hat{E}_a^\dagger\hat{E}_b\right),\ \ \hat{D}=\hat{N}_a-\hat{N}_b. \tag{2.5}$$

We have shown that a two-mode state is tangled if it satisfies the relation

$$0<\Re=\frac{N_1+E_1-E_2+E_3-1}{N_2+E_1}\leq 1, \tag{2.6}$$

where $\Re$ is entanglement function, $N_1,\ N_2,\ E_1,\ E_2$ and E_3 are defined as follows

$$\begin{aligned}&N_1=4\left(\left\langle\hat{N}_a\hat{N}_b\right\rangle-\left\langle\hat{N}_a\right\rangle\left\langle\hat{N}_b\right\rangle\right),\ N_2=2\left(\left\langle\hat{N}_a^2+\hat{N}_b^2\right\rangle-\left\langle\hat{N}_a\right\rangle^2-\left\langle\hat{N}_b\right\rangle^2\right),\\&E_1=\mathrm{Re}\left(\left\langle\hat{E}_a^{+2}\right\rangle\left\langle\hat{E}_b^2\right\rangle\right),\ E_2=\mathrm{Re}\left(\left\langle\hat{E}_a^{+2}\hat{E}_b^2\right\rangle\right),\ E_3=\left|\left\langle\hat{E}_a^\dagger\hat{E}_b\right\rangle\right|^2.\end{aligned}$$

If $\Re$ is larger, the entanglement degree is higher, when $\Re=1$ entanglement degree is maximum and when $\Re\leq 0$ state is not tangled. Thus, when considering the negative or positive properties of the entanglement function, we have a criterion to detect a entangled state, when considering the value of the entanglement function ($\Re\leq 1$) in the half interval $(0;1]$, we have an entanglement quantification criterion.

2.3 Summary

In this chapter, we have proposed two new two-mode nonclassical states, the Photon-added-and-subtracted two modes pair coherent state (PAASTMPCS) and the Superposition of photon-added and photon-subtracted pair coherent states (SPAPSPCS) by

adding and subtracting local and non-local photons to the two modes of the PCS. We have also established a new entanglement criterion for two-mode systems based on the particle number difference operator and the Hermite phase difference operator.

Chapter 3

PROPERTIES OF THE NEW MULTI-MODE NONCLASSICAL STATES

3.1 Nonclassical properties of the photon-added-and- subtracted two modes pair coherent state

3.1.1 Two-mode sum and difference squeezing properties

3.1.1.1 Two-mode sum squeezing property

The two-mode sum squeezing function of the PAASTMPCS is defined as

$$\begin{aligned} S(\phi) = 2 \Big[\Big(\mathrm{Re} \left(\left\langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{b}^{\dagger 2} \right\rangle \mathrm{e}^{i2\phi} \right) + \left\langle \hat{N}_a \hat{N}_b \right\rangle \Big) \\ - \left(\mathrm{Re} \left(\left\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger} \right\rangle^2 \mathrm{e}^{i2\phi} \right) + \left| \left\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger} \right\rangle \right|^2 \right) \Big] . \left\langle \hat{N}_a + \hat{N}_b + 1 \right\rangle^{-1} . \end{aligned} \tag{3.1}$$

In Figure 3.1, the graphs show that PAASTMPCS has sum squeezing property while the PCS does not, the sum squeezing property of the PAASTMPCS increases as the number of photons added to mode a increases (k increases) or the number of photons lost in mode b decreases.

3.1.1.2 Two-mode difference squeezing property

Studying results show that the PAASTMPCS hasn't two-mode difference squeezing properties.

3.1.2 Antibunching property

The high-order two-mode antibunching function for the PAASTMPCS is

$$\begin{aligned} R_{ab}(u,v) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n} ((n+k)!)^2}{(n!)^2} \left(\frac{((n+k-u-1)!)^{-1}}{(n+h-v+1)!} + \frac{((n+h-u-1)!)^{-1}}{(n+k-v+1)!} \right) \right] \\ \times \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m} ((m+k)!)^2}{(m!)^2} \times \left(\frac{((m+k-u)!)^{-1}}{(m+h-v)!} + \frac{((m+h-u)!)^{-1}}{(m+k-v)!} \right) \right]^{-1} - 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

In Figure 3.2, figure a shows if the number of photons added (k) to mode a decreases or the number of photons subtracted (l) from mode b decreases, the antibunching property increased. Figure b shows that when adding and subtracting photons to the two modes so that the total $k+h$ is constant, the case ($k=h$) gives the degree of antibunching is the highest at all values of $|\xi|$.

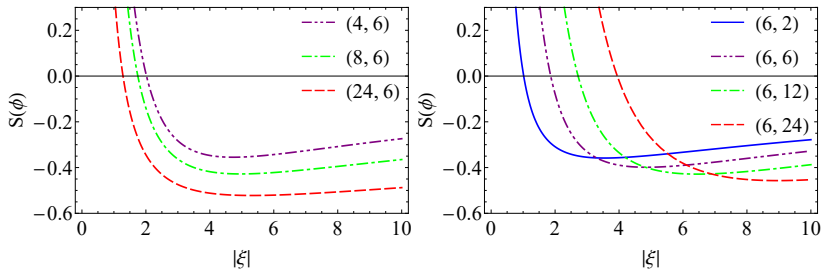


Figure 3.1: *Dependent of $S(\phi)$ on variable $|\xi|$ and parameter set (k, h), left figure $h = 6$ and k increasing, right figure $k = 6$ and h increasing.*

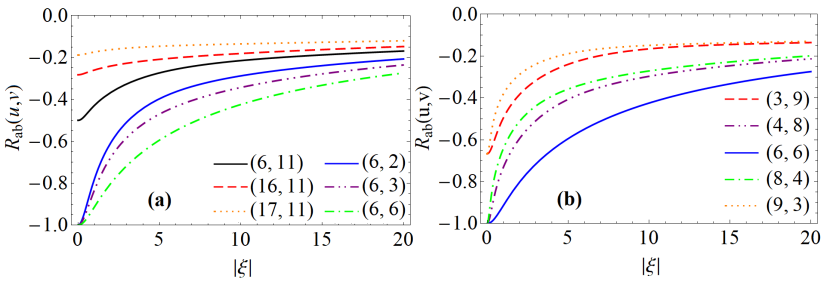


Figure 3.2: *The graphs of the function $R_{ab}(u, v)$ according to the variable $|\xi|$ and the parameter set (k, h), when choosing $u = 8$ and $v = 1$. Figure (a) is a case where only k or h is changed. Figure (b) is the case where k+h is constant.*

The investigating results also show that the antibunching properties depend on order parameters u and v. When v increases, antibunching properties decrease, whereas when u increases, the antibunching properties decrease. In addition, adding photons $(k > 0)$ or subtracting photons $(l > 0)$ both make the PAASTMPCS has a higher degree of antibunching than the PCS.

3.1.3 Non-Gaussian property

The Wigner function of the PAASTMPCS has the form

$$
\begin{aligned}
W = & \frac{4\mathrm{e}^{-2(|\alpha_a|^2+|\alpha_b|^2)}}{\pi^2}\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|\xi|^{2j}(j+k)!}{(j!)^2(j+h)!}\Big]^{-1} \\
& \times \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(4|\xi\alpha_a\alpha_b|)^{m+n}\cos[(m-n)(\varphi_a+\varphi_b-\varphi)]|2\alpha_a|^{2k}|\alpha_b|^{2h}}{m!n!(m+h)!(n+h)!} \\
& \times {}_2F_0[-n-k,-m-k;;-1/(2|\alpha_a|)^2] \\
& \times {}_2F_0[-n-h,-m-h;;-1/(2|\alpha_b|)^2]. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

In Figure 3.3, the left figure shows the Wigner function of the PAASTMPCS taking

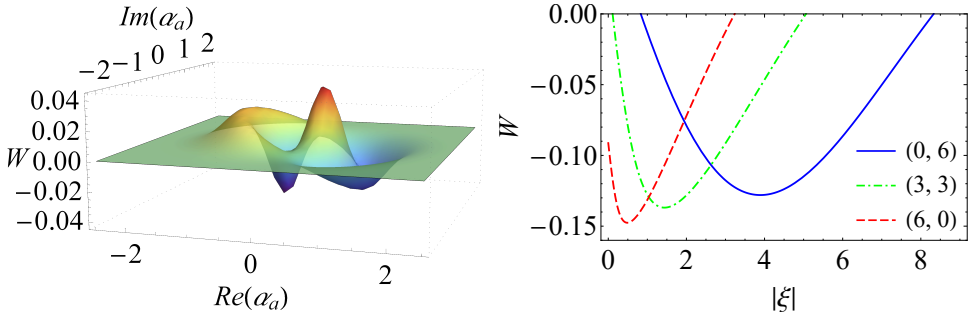


Figure 3.3: *The left figure is a graph of the function W depending on the real and imaginary parts of α_a with $|\xi| = 0.2, \alpha_b = 0.5, \varphi = 0$, and $h = k = 1$. The right figure is graphs of W depending on $|\xi|$ with $|\alpha_a| = 0.29, |\alpha_b| = 0.20, \varphi_a + \varphi_b - \varphi = \pi$.*

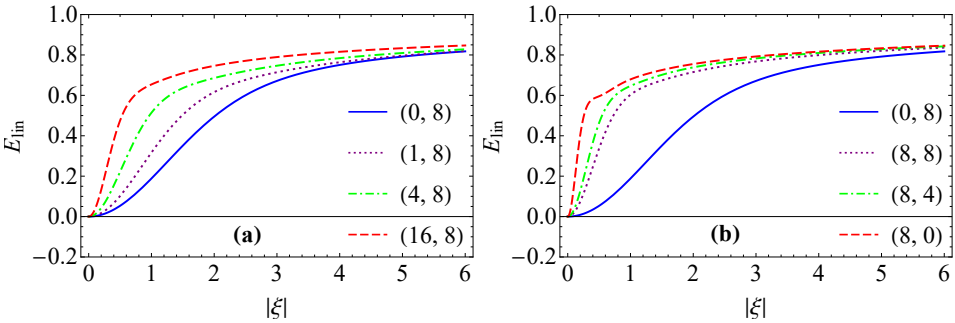


Figure 3.4: *Graphs of E_{lin} depends on variable $|\xi|$ and the parameter set (k, h). In figures (a) and (b), the line $(0, 8)$ corresponds to the PCS, the remaining lines correspond to the PAASTMPCS. Figure (a) is the case $h = 8$ while k increases. In figure (b), the dashed lines correspond to $k = 8$ while h decreases (l increases).*

negative values in some regions of the phase space. Therefore, the PAASTMPCS is a nonclassical and non-Gaussian state. The right figure shows that adding and subtracting photons to modes plays an important role in enhancing the non-Gaussian characteristic of the PAASTMPCS compared to the original the PCS state.

3.1.4 Entanglement property

3.1.4.1 Quantifying of entanglement degree by the linear entropy criterion

The linear entropy E_{lin} of the PAASTMPCS is defined as

$$E_{\text{lin}} = 1 - \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m}(m+k)!}{(m!)^2(m+h)!} \right)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\xi|^{2n}(n+k)!}{(n!)^2(n+h)!} \right)^2. \tag{3.4}$$

In Figure 3.4, the curves for the PAASTMPCS are always higher than for the PCS, so the PAASTMPCS has a higher degree of entanglement than for the PCS. The

curves in Figures (a) and (b) show that the entanglement degree of the PAASTMPCS is enhanced if the number of photons added k or the number of photons subtracted l increases.

3.1.4.2 Quantifying of entanglement degree by the new criterion

The entanglement function $\Re$ for the PAASTMPCS is defined as follows

$$\Re = 1 - \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |C_{n;k,h}(\xi)|^2 n^2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} |C_{n;k,h}(\xi)|^2 n\right)^2\right)^{-1}. \tag{3.5}$$

In Figure 3.5, the PAASTMPCS starts to be entangled when $|\xi|$ has a small value. The entanglement degree increases quickly and reaches values above 0.8 as the value of $|\xi|$ is low. The entanglement degree of the PAASTMPCS is always higher than that of the PCS. The graphs also show that when increasing the number of photon-added or photon-subtracted, the entanglement degree of the PAASTMPCS is enhanced, especially in the region $|\xi|$ is small. Moreover, the new criterion gives reliable results and has many similarities with the linear entropy criterion. According to the new criterion, the entanglement degree of the state according to the new criterion is usually higher if the coherence amplitude is not too small.

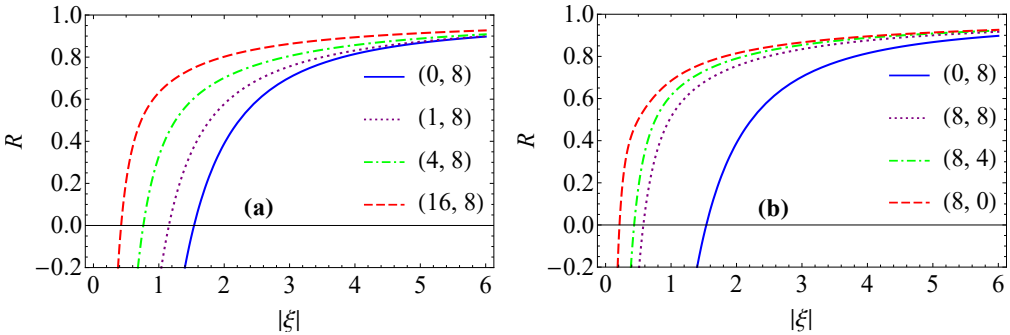


Figure 3.5: *Graphs of $\Re$ depend on $|\xi|$ and the parameter set (k, h) with $q = 8$. In figure (a), $h = 8$ while k is increasing. In figure (b), $k = 8$ while h is decreasing.*

3.2 Nonclassical properties of the superposition of photon-added pair coherent state

3.2.1 Two-mode sum squeezing property

The two-mode sum squeezing function $S(\phi)$ for the SPAPCS is defined as

$$
\begin{aligned}
S(\phi) = 2 \Bigg\{ & A_{qkl}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} \left[\frac{(n+k+2)!}{n!} \left(\frac{|\xi|^2 \cos^2 2\phi}{(n+1)(n+2)} + \frac{(n+k)(n+q)}{(n+k+1)(n+k+2)} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\varepsilon^2 (n+q+l+2)!}{(n+q)!} \left(\frac{|\xi|^2 \cos^2 2\phi}{(n+q+1)(n+q+2)} + \frac{n(n+q+l)}{(n+q+l+1)(n+q+l+2)} \right) \right] \\
& - \left(1 + \cos^2 2\phi\right) \left(A_{qkl}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n+1}}{n!(n+q)!} \left[\frac{(n+k+1)!}{(n+1)!} + \frac{\varepsilon^2 (n+q+l+1)!}{(n+q+1)!} \right] \right)^2 \Bigg\} \\
& \times \left\{ 1 + A_{qkl}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} \left[\frac{(n+k)!(2n+q+k)}{n!} + \frac{\varepsilon^2 (n+q+l)!(2n+q+l)}{(n+q)!} \right] \right\}^{-1} .
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

The graphs in Figure 3.6 show the two-mode sum squeezing property of the SPAPCS is enhanced if the number of photon-added k or photon-subtracted l is increased.

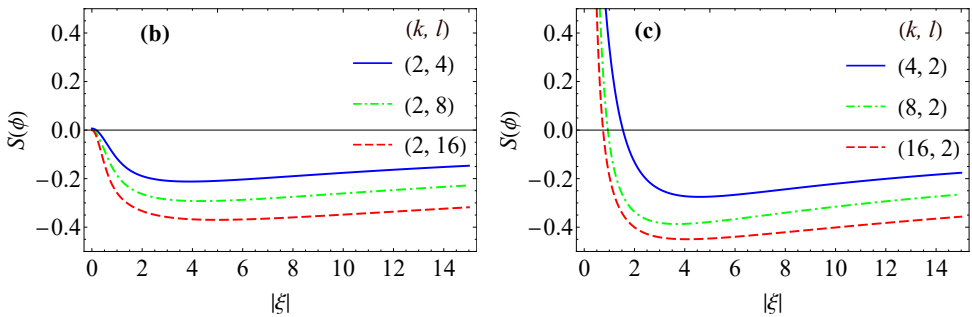


Figure 3.6: *The graphs of the function $S(\phi)$ depends on the variable $|\xi|$, ϕ and the parameter set (k, l) with $\varepsilon = 1, q = 2$.*

3.2.2 Non-Gaussian property

The Wigner function for the SPAPCS is defined as

$$
\begin{aligned}
W = & \frac{4 e^{-2|\alpha_a|^2 - 2|\alpha_b|^2}}{\pi^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{j,i=1}^{2} \frac{|\mathcal{C}_{i,n}| \, |\mathcal{C}_{j,m}| \, (4 \, |\alpha_a \alpha_b|)^{m+n} |2\alpha_a|^{a_j + a_i} |2\alpha_b|^{b_j + b_i}}{\sqrt{(m+a_j)!(m+b_j)!(n+a_i)!(n+b_i)!}} \\
& \times {}_2F_0 \left(-n - a_i, -m - a_j ; ; \frac{-1}{|2\alpha_a|^2} \right) {}_2F_0 \left(-n - b_i, -m - b_j ; ; \frac{-1}{|2\alpha_b|^2} \right) \\
& \times \cos \left[(m - n + a_j - a_i) \, \varphi_a + (m - n + b_j - b_i) \, \varphi_b - (m - n) \, \varphi \right] .
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

In Figure 3.7, figure (a) shows the existence of negative values of the Wigner function in some regions of phase space, so the SPAPCS is a non-Gaussian state. The curves in figure (b) show that the non-Gaussianity of the SPAPCS is higher than that of the PCS. The more photons are added to the two modes of the PCS, the non-Gaussianity of the SPAPCS is enhanced.

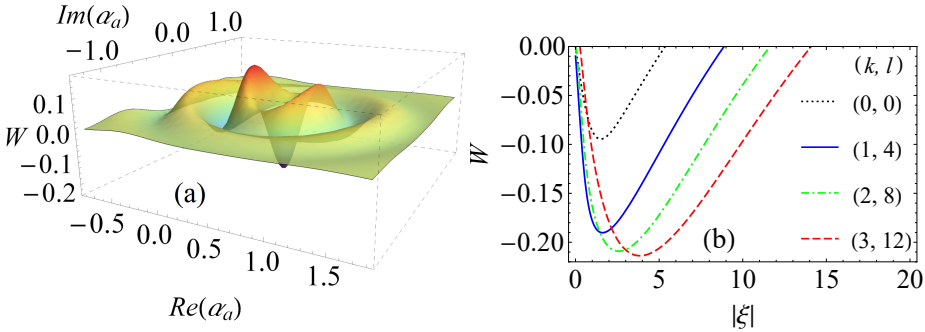


Figure 3.7: *The graphs of the Wigner function W are plotted with the parameters chosen as $q = 1$, $\varepsilon = 1$, $|\beta| = 0.3$, $\varphi_a = \varphi_b = \varphi = 0$. In (a), W as a function of the real and imaginary parts of α where $\xi = 4$ and $(k, l) = (3, 12)$. In (b), W depends on the variable $|\xi|$ and parameter set (k, l) with $|\alpha| = 0.5$.*

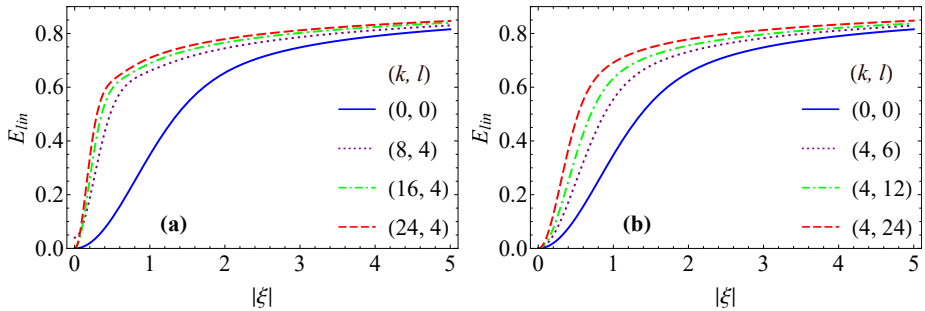


Figure 3.8: *The graphs of the function E_{lin} depends on the variable $|\xi|$ with $\varphi = \pi, \varepsilon = 1, q = 3$. In Figures (a) and (b) curves (0, 0) correspond to the PCS, the other lines correspond to the SPAPCS.*

3.2.3 Entanglement property

The linear entropy function E_{lin} is as follows

$$E_{\text{lin}} = 1 - A_{qkl}^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{4n}}{(n!)^2((n+q)!)^2} \left\{ \frac{((n+k)!)^2}{(n!)^2} + \frac{\varepsilon^4((n+q+l)!)^2}{((n+q)!)^2} + \frac{2\varepsilon^2|\xi|^{2l} n!(n+k+l)!}{((n+l)!)^2} + \frac{2\varepsilon^2|\xi|^{2k}(n+q)!(n+q+k+l)!}{((n+q+k)!)^2} \right\}. \tag{3.8}$$

In Figure 3.8, the curves show that the turbulence of the SPAPCS is always higher than that of the PCS for any positive value of $|\xi|$ and it is enhanced if the number of photon-added to the modes of the PCS increases.

3.3 Nonclassical properties of the superposition of photon-added and photon-subtracted pair coherent states

3.3.1 Two-mode sum squeezing property

The two-mode sum squeezing function $S(\phi)$ of the SPAPSPCS is defined as

$$S(\phi) = \left\langle \hat{N}_a + \hat{N}_b + 1 \right\rangle^{-1} \left\{ 2\left(\mathrm{Re}\left(\left\langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{b}^{\dagger 2} \right\rangle \mathrm{e}^{i2\phi} \right) + \left\langle \hat{N}_a \hat{N}_b \right\rangle \right) \right.$$
$$\left. -2\left(\mathrm{Re}\left(\left\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger} \right\rangle^2 \mathrm{e}^{i2\phi} \right) + \left| \left\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger} \right\rangle \right|^2 \right) \right\}. \tag{3.9}$$

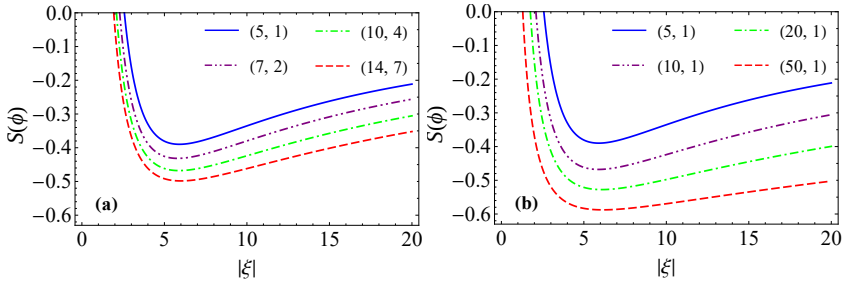


Figure 3.9: *The graphs of $S(\phi)$ depends on the variable $|\xi|$ and the parameter set (k, l) while the other parameters are kept at $\varepsilon = 1$, $\phi = 0$, and $q = 9$.*

In Figure 3.9, the curves show that increasing the number of photon-added to mode a and the number of photon-subtracted in mode b can increase the squeezing property of the SPAPSPCS. Meanwhile, the original the PCS state has no two-mode sum squeezing property. Besides, the squeezing property of the SPAPSPCS is strongly enhanced as the number of photon-added to mode a increases.

3.3.2 Antibunching property

The high-order two-mode antibunching function for the SPAPSPCS is determined

$$R_{ab}(u, v) = -1 + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s,r,i=1}^{2} \frac{C^*_{r,n+b_s-b_r} C_{s,n} (n+a_s)!(n+b_s)! \delta_{b_s-b_r, a_s-a_r}}{\left(n+a_s-u_i+(-1)^i\right)!\left(n+b_s-v_i+(-1)^{i-1}\right)!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s,r,i=1}^{2} \frac{C^*_{r,n+b_s-b_r} C_{s,n} (n+a_s)!(n+b_s)! \delta_{b_s-b_r, a_s-a_r}}{(n+a_s-u_i)!(n+b_s-v_i)!}}, \tag{3.10}$$

where $u_1 = v_2 = u$; $u_2 = v_1 = v$.

In Figure 3.10 (a), the graphs show that the antibunching degree of the SPAPSPCS will increase if the order parameters v decreases or u increases. In Figure 3.10 (b), the graphs show that the antibunching degree of the SPAPSPCS is higher than that of the PCS and is enhanced if the number of photons added to mode a and subtracted in mode b increase together.

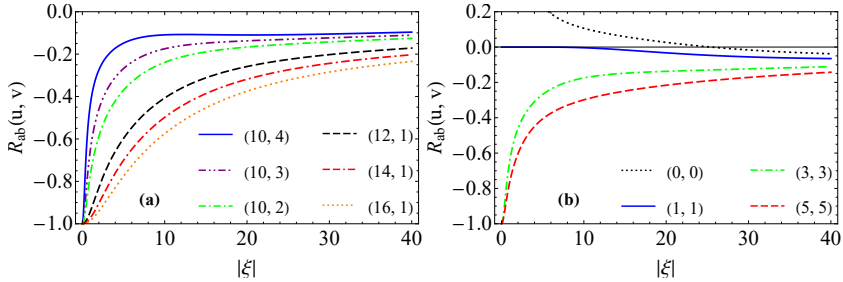


Figure 3.10: *The graph of $R_{ab}(u, v)$ depends on the variable $|\xi|$ with parameters fixed as $\varepsilon = 1$, $\varphi = 0$ and $q = 9$. In figure (a), the parameter pair (u, v) changes while the parameter pair (k, l) is fixed as $k = l = 3$. In figure (b), the parameter pair (k, l) changes while the parameter pair (u, v) is fixed as $u = 10$ and $v = 3$.*

3.3.3 Non-Gaussian property

The Wigner function of the the SPAPSPCS has the form

$$
\begin{aligned}
W = & \frac{4\mathrm{e}^{-2\left(|\alpha_a|^2+|\alpha_b|^2\right)}}{\pi^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{r,s=1}^{2} \frac{|C_{s,n}|\,|C_{r,m}|\,|2\alpha_a|^{m+n+a_r+a_s}|2\alpha_b|^{m+n+b_r+b_s}}{\sqrt{(m+a_r)!(m+b_r)!(n+a_s)!(n+b_s)!}} \\
& \times \cos\left((m-n)(\varphi_a+\varphi_b-\varphi)\right)\cos\left((a_r-a_s)\varphi_a\right)\cos\left((b_r-b_s)\varphi_b\right) \\
& \times {}_2F_0\left(-n-a_s, -m-a_r; ; -1/|2\alpha_a|^2\right) \\
& \times {}_2F_0\left(-n-b_s, -m-b_r; ; -1/|2\alpha_b|^2\right). \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

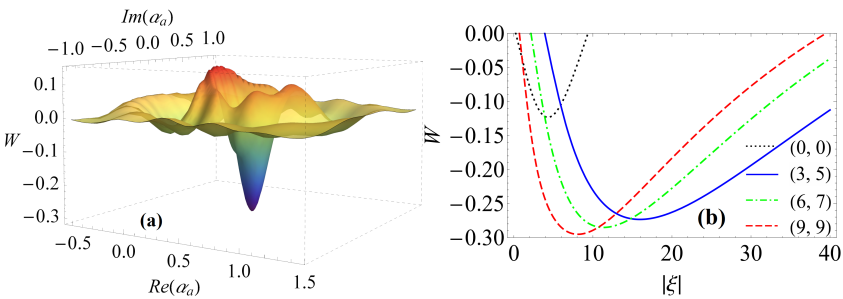


Figure 3.11: *The Wigner function graphs (W) of the SPAPSPCS with parameters are fixed as $\varepsilon = 1$; $q = 12$; $\varphi_a = \varphi_a = \varphi = 0$. Figure (a) is graph of the Wigner function W in phase space with parameters as $\xi = 8$; $|\alpha_b| = 0.4$; $k = l = 9$. Figure (b) are curves of function W depend on the variable $|\xi|$, the parameter pair (k, l) changes while the other parameters are fixed as $|\alpha_a| = 0.5$; $|\alpha_b| = 0.4$.*

In Figure 3.11 (a), the Wigner function takes negative values in certain regions of the phase space, so it can confirm that the SPAPSPCS has non-Gaussian property. In

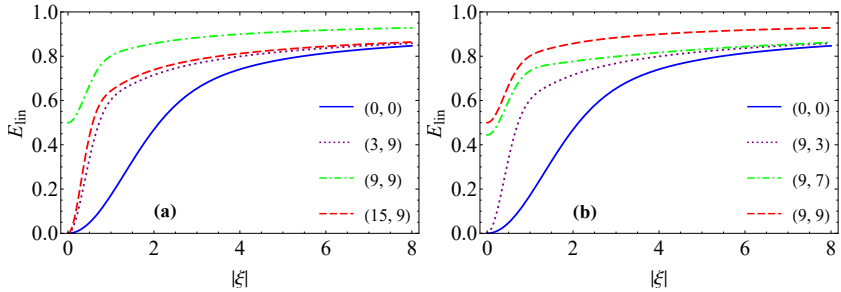


Figure 3.12: *The graph of the E_{lin} function depends on the variable $|\xi|$ with the parameter pair (k, l) changing while the other parameters are fixed as $\varepsilon = 1; \varphi = \pi$. Figure (a) corresponds to the case where $l = q = 9$ and k increases. Figure (b) corresponds to the case where $k = q = 9$ and l increases.*

Figure 3.11 (b), plots show that when appropriate parameters are selected, adding and subtracting photons produces the SPAPSPCS with Wigner negative degree is higher the PCS. Especially when $k = l$, the minimum value of the function W decreases, so the non-Gaussian property is enhanced.

3.3.4 Entanglement property

3.3.4.1 Quantifying of entanglement degree by the linear entropy criterion

The $E_{\rm lin}$ function for the SPAPSPCS is determinted as follows

$$E_{\rm lin} = 1 - \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{A_{q,kl}^{4}|\xi|^{4n}}{(n!)^2((n+q)!)^2} \left\{ \frac{((n+k)!)^2}{(n!)^2} + \frac{\varepsilon^4((n+q)!)^2}{((n+q-l)!)^2} \right.$$
$$+ \frac{2\varepsilon^2|\xi|^{2l}\,(n+k)!}{(n+l)!} + \frac{2\varepsilon^2|\xi|^{2k}\,(n+q)!}{(n+q+k-l)!} + \delta_{k,l}4\varepsilon^3|\xi|^{3k}$$
$$\left. \times \left[\frac{\cos(2k\varphi)}{2\varepsilon|\xi|^k} + \frac{\cos(k\varphi)\,(n+k)!}{\varepsilon^2|\xi|^{2k}n!} + \frac{\cos(k\varphi)\,n!}{(n+k)!} \right] \right\}, \tag{3.12}$$

In Figure 3.12, the curves show that the entanglement degree of the SPAPSPCS is always greater than that of the PCS, which can reach over 90% even when the value of $|\xi|$ is small and k or l is not large. If k or l increases, the entanglement degree of the SPAPSPCS also increases when they satisfy $k = l = q$, the entanglement is the best.

3.3.4.2 Quantifying of entanglement degree by the new criterion

Comparing it with the linear entropy criterion, we found that the SPAPSPCS is a state with a strong entanglement degree. Both criteria have quite similar results when they show that the entanglement degree of the SPAPSPCS is enhanced by increasing the number of photons added and subtracted in the two modes of the PCS. And the entanglement degree is best when $k = l = q$, that is, when the number of photons in

the two modes of the SPAPSPCS is equal. The difference occurs in the region where $|\xi|$ has a small value. Those similarities and differences are the same as they apply to the PAASTMPCS.

3.4 High-order nonclassical property in superposition of three-mode photon-added trio coherent states

3.4.1 High-order three-mode sum squeezing

The high-order three-mode sum squeezing function of superposition of three-mode photon-added trio coherent states (STMPATCS), with $\xi = r$, has the form

$$S_U(m) = \frac{2C_{2m} - 4C_m^2 + 2D_{m,m,m}}{|B_{m,m,m} - D_{m,m,m}|}, S_V(m) = \frac{-2C_{2m} + 2D_{m,m,m}}{|B_{m,m,m} - D_{m,m,m}|}. \tag{3.13}$$

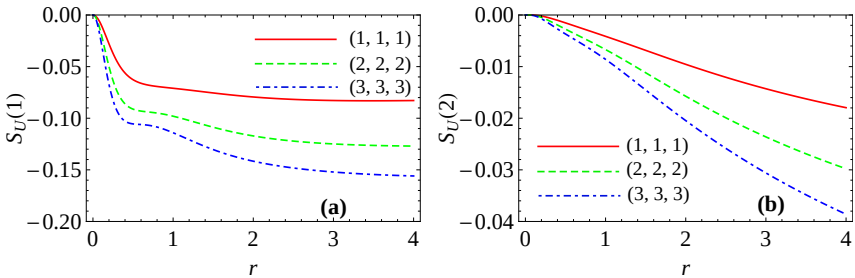


Figure 3.13: *The function $S_U(m)$ depends on r and the parameter set (h, k, l) when $p = q = 0$ and $\varepsilon = \lambda = \sigma = 1$. In figure (a) $m = 1$, and $m = 2$ in (b).*

In Figure 3.13, the graphs show that the squeezing degree is enhanced by increasing h, k, l as well as r with any order of m. However negative degree of $S_U(m)$ will decrease if m has a high value. Note that the TCS does not have the high-order three-mode sum squeezing property.

3.4.2 High order antibunching property

3.4.2.1 Single-mode high order antibunching property

Single-mode high order antibunching (SMHOA) functions for the STMPATCS have forms

$$R_a(m) = \frac{D_{m+1,0,0}}{D_{m,0,0}D_{1,0,0}} - 1, R_b(m) = \frac{D_{0,m+1,0}}{D_{0,m,0}D_{0,1,0}} - 1, R_c(m) = \frac{D_{0,0,m+1}}{D_{0,0,m}D_{0,0,1}} - 1,$$

where $D_{i,j,w} = \langle \hat{a}^{\dagger i}\hat{a}^i\hat{b}^{\dagger j}\hat{b}^j\hat{c}^{\dagger w}\hat{c}^w \rangle$.

In Figure 3.14, the results show that the degree of the SMHOA in mode a is enhanced by increasing the order m. However, it is reduced if the numbers of added photons h, k and l are increased. Besides, when m is small and h, k and l are large, the factors

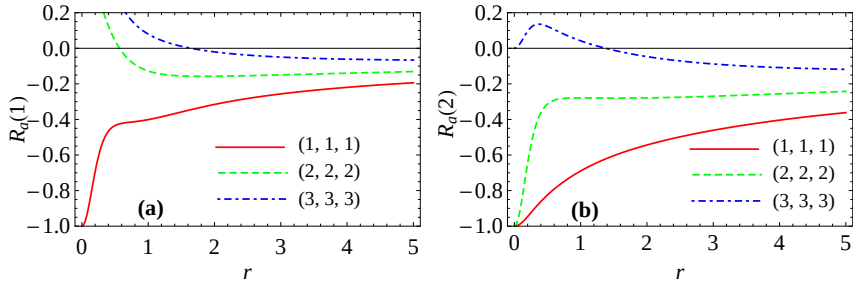


Figure 3.14: *The function $R_a(m)$ depends on r with $p = q = 0$ and$\varepsilon = \lambda = \sigma = 1$. Figure (a) corresponds to $m = 1$ and (b) corresponds to $m = 2$.*

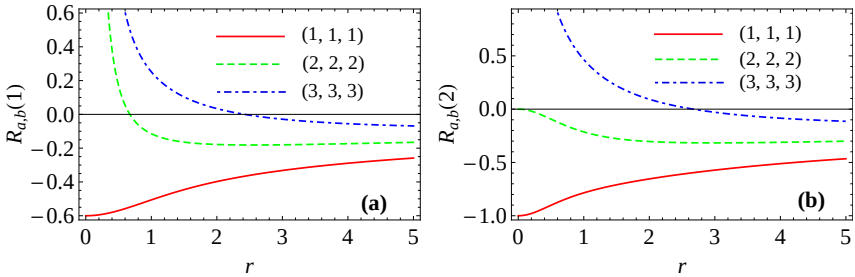


Figure 3.15: *Graphs of function $R_{a,b}(m)$ depends on variable r and parameter set (h, k, l) with $p = q = 0$ and $\varepsilon = \lambda = \sigma = 1$.*

$R_a(m)$ becomes more negative in the high value region of r. More importantly, when m is large, the STMPATCS always exists in the SMHOA.

3.4.2.2 Two-mode high order antibunching property

For the STMPATCS, we consider two-mode m-order antibunching function for mode pairs respectively a and b, a and c, b and c, the results are as follows

$$\begin{aligned} &R_{a,b}(m) = \frac{D_{m+1,0,0}+D_{0,m+1,0}}{D_{m,1,0}+D_{1,m,0}} - 1,\ R_{a,c}(m) = \frac{D_{m+1,0,0}+D_{0,0,m+1}}{D_{m,0,1}+D_{1,0,m}} - 1, \\ &R_{b,c}(m) = \frac{D_{0,m+1,0}+D_{0,0,m+1}}{D_{0,m,1}+D_{0,1,m}} - 1, \end{aligned} \tag{3.14}$$

where $D_{i,j,w} = \langle \hat{a}^{\dagger i}\hat{a}^{i}\hat{b}^{\dagger j}\hat{b}^{j}\hat{c}^{\dagger w}\hat{c}^{w}\rangle$. In Figure 3.15, the graphs show that the degree of two-mode high-order antibunching is enhanced by increasing m-order or when r is large. However, the degree of two-mode higher-order antibunching of the STMPATCS is decreased if the number of photon-added to the TCS increases.

3.4.3 Higher-order three-mode entanglement

The entanglement function $E(m)$, with $\xi = r$, for the STMPATCS is determined

$$E(m) = \left(D_{m,0,0}D_{0,m,0}D_{0,0,m}\right)^{1/2} - C_m. \tag{3.15}$$

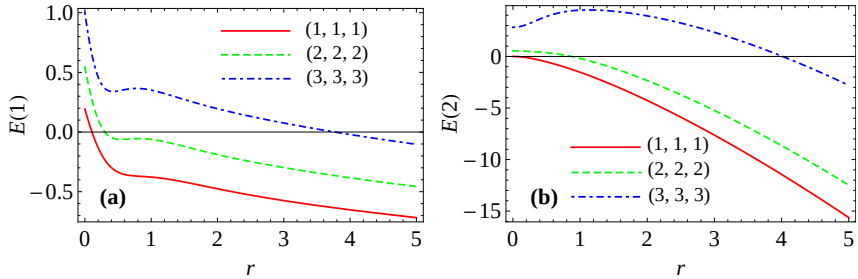


Figure 3.16: *$E(m)$ as a function of r with parameter set (h, k, l) when $p = q = 0$ and $\varepsilon = \lambda = \sigma = 1$.*

In Figure 3.16, the graphs show that the negative degree of $E(m)$ is enhanced if we increase m or decrease h, k, l. Also, the higher the value of r, the greater the negative degree of $E(m)$.

3.5 Summary

The new two- and three-mode nonclassical states include the PAASTMPCS, the SPAPSPCS, the SPAPCS and the STMPATCS, all of which have strongly nonclassical properties. Those properties are significantly enhanced compared to the original PCS state. Especially among those parameters, the parameters about the number of photon-added and photon-subtracted play an important role in improving the nonclassical properties of the new states. When comparing the high-order nonclassical property of the STMPATCS with the first-order case, we find that the higher-order case has a higher degree of nonclassicality. The surveying and comparison results show that the new entanglement criterion has highly effective in quantifying the entanglement degree for the two-mode states. The obtained results are quite similar to the linear entropy criterion. In addition, the entanglement degree of the states according to the new criterion is usually higher than that of the linear entropy criterion in the region where the coherence amplitudes are not too small.

Chapter4
QUANTUM TELEPORTATION WITH NEW NONCLASSICAL STATES

4.1 Quantum teleportation with photon-added-and- subtracted two modes pair coherent state

4.1.1 Teleportation process with the orthogonal quadrature components measurements protocol

The average fidelity of the teleportation process is determined

$$F_{\mathrm{av}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2j} (j+k)!}{(j!)^2 (j+h)!} \right)^{-1} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2^{-(k+h+1)} |\xi|^{n+m} (n+m+k+h)!}{2^{(n+m)} n! m! (n+h)! (m+h)!}. \tag{4.1}$$

In Figure 4.1, the graphs show that the average fidelity for the PAASTMPCS is always greater than the PCS.The average fidelity is enhanced when $|\xi|$ is large or the number of photons added and subtracted for the PCS increase. Besides, the average fidelity takes the largest value in case the number of photons in mode a and mode b is equal, i.e. $k = h = q - l$.

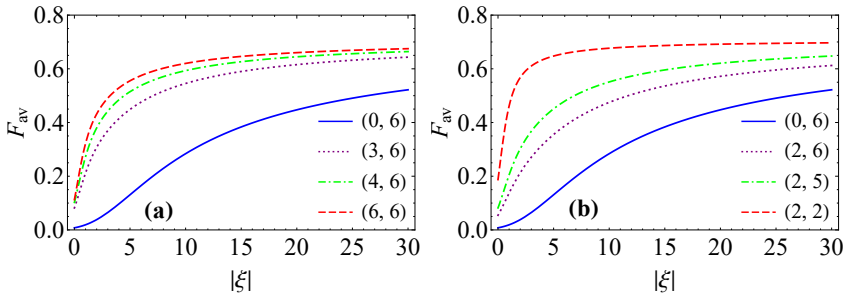


Figure 4.1: *The graphs of function F_{av} depend on $|\xi|$ and the parameter set (k, h) with $q = 6$, the lines $(k, h) = (0, 6)$ corresponding to the PCS, the other lines of the PAASTMPCS.*

4.1.2 Teleportation process with the number sum and phase difference measurements protocol

The average fidelity of the teleportation process is determined by

$$F_{\mathrm{av}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2j} (j+k)!}{(j!)^2 (j+h)!} \right)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{|\xi|^n |\alpha|^{2(m-n)} \sqrt{(n+k)!}}{\mathrm{e}^{|\alpha|^2} n! (m-n)! \sqrt{(n+h)!}} \right)^2. \tag{4.2}$$

In Figure 4.2 the graphs show that the average fidelity F_{av} increases as decreasing $|\alpha|$ and it can reach unit if $|\alpha|$ is small and $|\xi|$ is large. In addition, the survey results

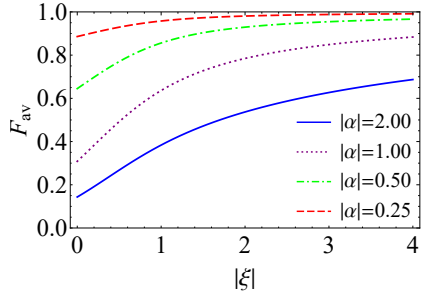


Figure 4.2: *The graphs of F_{av} depend on the variable $|\xi|$ with $k = 4, h = 6$ and $|\alpha|$ change.*

show that when increasing the number of photons added and subtracted in both modes of the PCS, the average fidelity $F_{\rm av}$ of the PAASTMPCS is enhanced and is always higher than the PCS.

4.2 Quantum teleportation with superposition of photon-added pair coherent state

The average fidelity of the quantum teleportation process is

$$F_{\rm av} = A_{qkl}^2 \times \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2^{-(n+m+p-q+1)}|\xi|^{n+m+2(p-q)}}{\sqrt{n!m!(n+p)!(m+p)!}}\left(\frac{2^{-k}\,(n+m+k+p-q)!}{(n+p-q)!(m+p-q)!}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ \frac{\varepsilon^2|\xi|^{-2l}2^l(n+p)!(m+p)!\,(n+m+p-q-l)!}{(n+p-l)!(m+p-l)!\,(n+p-q-l)!\,(m+p-q-l)!}\right)\right\}. \tag{4.3}$$

In Figure 4.3, the graphs show that the average fidelity of quantum teleportation process with the SPAPCS entangled resource is higher than the PCS and is enhanced if the photon number is increased by less than l with the parameters the remaining number is fixed (figure a). Especially when p, q, l satisfy $p = 2q = 2l$ and increase gradually, the maximum value of $F_{\rm av}$ is also greatly enhanced and can be reached above $0,85$ while only maxing out at 0.76 for the PCS.

4.3 Quantum teleportation with superposition of photon-added and photon-subtracted pair coherent states

The average fidelity of teleportation with the SPAPSPCS entanglement resource has the form

$$F_{\rm av} = |A_{q,kl}(\xi)|^2 \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{|\xi|^{n+m}\cos\left((n-m)\varphi\right)}{2^{n+m+q+1}n!m!}\left(\frac{2^{-k}\,(n+m+k+q)!}{(n+q)!(m+q)!}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2^l\varepsilon^2\,(n+m+q-l)!}{(n+q-l)!(m+q-l)!}+\frac{2\varepsilon\,(n+m+q)!\delta_{k,l}}{(n+q)!(m+q-k)!}\right)\right]. \tag{4.4}$$

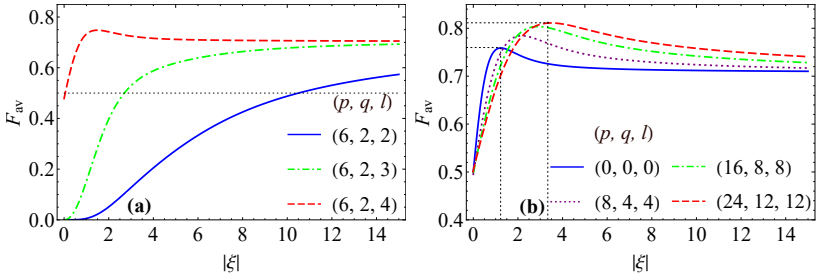


Figure 4.3: *The graph of the average fidelity F_{av} depends on the variable $|\xi|$ and the parameter set (p, q, l) with $p \geq q + l, \varepsilon = 0.25, k = 1$. In figure (a), the parameter l increases. In figure (b), $p = 2q = 2l$ and they increase.*

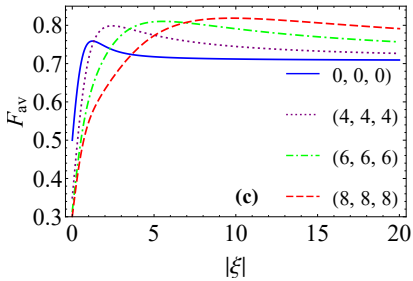


Figure 4.4: *The graphs of the function F_{av} depend on the variable $|\xi|$ with the three parameters (k, q, l) changing but satisfying $(k = q = l)$ and other parameters are fixed as $\varepsilon = 1; \varphi = 0$.*

The surveying results show that the average fidelity of the teleportation process is enhanced by increasing the number of photons added (k) and subtracted (l) in the two modes of the PCS. However, if k or l increases to the case $k = q = l$ then the maximum fidelity will be best as shown in Figure 4.4. Then the average fidelity can reach 82% and possibly higher, while the maximum average fidelity for the PCS is 76%.

4.4 Summary

The research results show that all three new states are good entanglement resources for the teleportation process. The average fidelity for all three cases is enhanced by increasing the number of photon-added or photon-subtracted, or both photon-added and photon-subtracted to two modes of the PCS.

The orthogonal quadrature components measurements protocol is suitable for the SPAPCS and the SPAPSPCS. In this case, the maximum average fidelity can reach over 80%.

Meanwhile, the PAASTMPCS is suitable for the number sum and phase difference measurements protocol if the amplitude of teleported coherent state is quite small. In this case, the average fidelity of the process can reach approximately 100%.

CONCLUSIONS

Passing the process of researching and completing the thesis, we have obtained the following new results.

First, we have introduced two new two-mode nonclassical states by using the method of adding and subtracting photons. There are the photon-added-and-subtracted two modes pair coherent state and the superposition of photon-added and photon-subtracted pair coherent states.

Second, we have created a new entanglement criterion for two-mode systems via using the phase difference operator with Hermite form and particle difference operator. The investigating and comparing results show that the new criterion is highly effective in detecting and quantifying the entanglement degree for new two-mode states. In addition, the investigating results by the new criterion have many similarities with the linear entropy criterion. However, the entanglement degree of the state according to the new criterion is usually higher.

Third, we have studied the properties of two new nonclassical states proposed in the thesis and two new two-mode and three-mode nonclassical states recently proposed. Research results on squeezing, antibunching, non-Gaussian and entanglement properties show that these states have highly nonclassicality. Their nonclassicalities are enhanced by varying the number of photons added and subtracted in two modes of the original state. For the STMPATCS, some nonclassical properties in the high-order case are better than in the low-order case.

Fourth, we used the new two-mode states including the PAASTMPCS, the SPAPCS, and the SPAPSPCS be entanglement resources for coherent single-state quantum teleportation. Based on the average fidelity, we found that teleportation processes were very successful. The average fidelity of teleportation processes is enhanced and significantly higher than the PCS case by adding and subtracting the number of photons for the two modes of the PCS.

Thus, we have accomplished the objectives of the thesis. The thesis can continue to be researched and developed in different directions. The first, we can study the high-order nonclassical properties of new two-mode states. The second, we can propose experimental models to generate the new two-mode states. The third, we can apply the new entanglement criterion to many different state families in order to find new states with high entanglement degrees and identify state families that conform to this new criterion.

LIST OF THE AUTHOR'S PUBLICATIONS USED IN THE THESIS

1. Truong Minh Duc, **Ho Sy Chuong**, and Tran Quang Dat (2021). Detecting nonclassicality and non-Gaussianity by the Wigner function and quantum teleportation in photon-added-and-subtracted two modes pair coherent state. *Journal of Computational Electronics*, **20**, 2124-2134.

2. **Ho Sy Chuong** and Truong Minh Duc (2022). Sum squeezing, entanglement and quantum teleportation of the superposition of photon-added pair coherent state. *Journal of Physics: Conference Series*, **2269**, 012003(1-8).

3. Tran Quang Dat, **Ho Sy Chuong**, Dao Van Hung and Truong Minh Duc (2022). Higher-order nonclassicality in superposition of three-mode photon-added trio coherent states. *Communications in Physics*, **32**, 141-156.

4. **Ho Sy Chuong**, Ho Ngoc Trung and Truong Minh Duc (2022). Studying non-classical properties of the photon-added-and-subtracted two modes pair coherent state. *Hue University Journal of Science: Natural Science*, **131**, 75-83.