

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THỊ HỒNG THANH

NGHIÊN CỨU CÁC TÍNH CHẤT,
CÁC QUÁ TRÌNH ĐỘNG VÀ ỨNG DỤNG
CỦA MỘT SỐ TRẠNG THÁI
PHI CỔ ĐIỂN HAI VÀ BA MODE MỐI

LUẬN ÁN TIẾN SĨ VẬT LÝ

Huế, 2022

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THỊ HỒNG THANH

NGHIÊN CỨU CÁC TÍNH CHẤT,
CÁC QUÁ TRÌNH ĐỘNG VÀ ỨNG DỤNG
CỦA MỘT SỐ TRẠNG THÁI
PHI CỔ ĐIỂN HAI VÀ BA MODE MỚI

Ngành: Vật lý lý thuyết và Vật lý toán

Mã số: 9440103

LUẬN ÁN TIẾN SĨ VẬT LÝ

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS. TRƯỜNG MINH ĐỨC

Huế, 2022

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả nghiên cứu và đồ thị nêu trong luận án là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được ai khác công bố trong bất kỳ một công trình hay tài liệu nào.

Tác giả luận án

Lê Thị Hồng Thanh

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành, sâu sắc cùng sự kính trọng đến thầy giáo PGS.TS. Trương Minh Đức, người thầy đã tận tình chỉ dạy, truyền cảm hứng và góp phần rất lớn trong định hướng nghiên cứu khoa học của tôi. Thầy tận tình chỉ dẫn từng câu chữ, cách viết, công bố một bài luận nghiên cứu cũng như động viên, cổ vũ tôi vượt qua khó khăn trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án này. Tôi xin được tri ân Thầy giáo của mình cũng như cảm tạ gia đình Thầy.

Tôi xin trân trọng cảm ơn đến quý thầy giáo, cô giáo Khoa Vật lý, trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế đã giảng dạy, giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong thời gian tôi học tập và nghiên cứu. Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn đến Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo Sau đại học, trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế đã tạo điều kiện thuận lợi và chỉ dẫn tận tình để tôi hoàn thành các thủ tục hành chính trong suốt thời gian học tập.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến Ban Giám hiệu trường Đại học Quảng Nam đã cho phép, tạo điều kiện thuận lợi và giúp đỡ tôi trong thời gian tôi học tập, nghiên cứu và công tác. Xin trân trọng cảm ơn tới quý thầy giáo, cô giáo tại Khoa Khoa học Tự nhiên và Kỹ thuật, trường Đại học Quảng Nam cùng các đồng nghiệp tại trường Đại học Quảng Nam đã luôn động viên, chia sẻ và giúp đỡ để tôi có thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tôi xin cảm ơn tới các đồng môn của mình gồm Trần Quang Đạt, Hồ Sỹ Chương, Phan Ngọc Duy Tịnh đã chia sẻ những khó khăn và giúp đỡ tôi rất nhiều trong thời gian làm nghiên cứu sinh.

Cuối cùng, tôi xin dành tất cả niềm yêu thương và sự cảm tạ chân thành đến đại gia đình của mình. Xin cảm ơn bố, mẹ và gia đình nhỏ trong

đó có chồng và hai con gái yêu quý của tôi đã chịu nhiều vất vả và hi sinh trong suốt thời gian tôi làm nghiên cứu sinh và hoàn thành luận án này.

Huế, tháng 11 năm 2022

Tác giả

Lê Thị Hồng Thanh

BẢNG CHỮ VIẾT TẮT

Viết tắt	Tiếng Anh	Tiếng Việt
GPAPCS	Generalized photon-added pair coherent state	Trạng thái kết hợp cặp thêm photon tổng quát
JC	Jaynes-Cummings	Jaynes-Cummings
PAPCS	Photon added pair coherent state	Trạng thái kết hợp cặp thêm photon
PCS	Pair coherent state	Trạng thái kết hợp cặp
QED	Quantum electrodynamics	Điện động lực học lượng tử
qubit	quantum bit	bit lượng tử
SPAPCS	Superposition of photon-added pair coherent state	Trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon
TCS	Trio coherent state	Trạng thái kết hợp bộ ba
PATCS	Photon-added trio coherent state	Trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon

Danh sách hình vẽ

- 1.1 Sự phụ thuộc của hàm phân bố xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích $P_e(t)$ theo λt với $|\alpha|^2 = 10$ 28
- 2.1 Sự phụ thuộc của $P_e(t)$ theo λt trong các trường hợp (a) $q = 0, |\xi| = 2$, và (b) $q = 10, |\xi| = 6$. Đường đứt nét màu đỏ ứng với $(P_e(t) + 2)$ và $(m, k) = (0, 0)$, đường chấm chấm màu tím ứng với $(P_e(t) + 1)$ và $(m, k) = (2, 2)$, đường liền nét màu xanh ứng với $P_e(t)$ và $(m, k) = (5, 5)$ 38
- 2.2 Sự phụ thuộc của $P_n(t)$ theo λt cho trường ở PCS ($m = k = 0, q = 0$). Đường A ứng với $P_n(t)$, $n = 5, |\xi| = 3$. Đường B ứng với $P_n(t) + 0.3$, $n = 5, |\xi| = 5$. Đường C ứng với $P_n(t) + 0.8$, $n = 10, |\xi| = 10$ 41
- 2.3 Sự phụ thuộc của $P_n(t)$ theo λt với $n = 10, |\xi| = 10$. Đường đứt nét màu đỏ ứng với $P_n(t)$ và $(m, k) = (0, 0)$, đường nét gạch chấm màu tím ứng với $P_n(t) + 0.5$ và $(m, k) = (2, 2)$, đường liền nét màu xanh ứng với $P_n(t) + 1$ và $(m, k) = (5, 5)$. 42
- 2.4 Sự phụ thuộc của hàm $g_{ii}^{(2)}(t)$ theo λt với $|\xi| = 2, q = 0$. Đường đứt nét màu đỏ ứng với $g_{ii}^{(2)}(t)$ và $(m, k) = (0, 0)$, đường chấm chấm màu tím ứng với $g_{ii}^{(2)}(t) + 0.1$ và $(m, k) = (2, 2)$, đường liền nét màu xanh ứng với $g_{ii}^{(2)}(t) + 0.15$ và $(m, k) = (5, 5)$ 43

- 2.5 Sự phụ thuộc của hàm $g_{ii}^{(2)}(t)$ theo λt với $|\xi| = 2, q = 2$, Hình b (đường đứt nét màu đỏ $g_{11}^{(2)}(t)$), (đường chấm chấm màu tím $g_{11}^{(2)}(t) + 0.1$), (đường liền nét màu xanh $g_{11}^{(2)}(t) + 0.15$). Hình c (đường đứt nét màu đỏ $g_{22}^{(2)}(t)$) (đường chấm chấm màu tím $g_{22}^{(2)}(t) + 0.35$), (5, 5) (đường liền nét màu xanh $g_{11}^{(2)}(t) + 0.4$). Đường đứt nét màu đỏ ứng với $(m, k) = (0, 0)$, đường chấm chấm màu tím ứng với $(m, k) = (2, 2)$, đường liền nét màu xanh ứng với $(m, k) = (5, 5)$ 43
- 2.6 Sự phụ thuộc của $L_A(t)$ theo λt với $|\xi| = 2$ trong hai trường hợp (a) $q = 0$ và (b) $q = 2$. Đường đứt nét màu đỏ là $L_A(t)$ và $(m, k) = (0, 0)$. Đường chấm chấm màu tím là $L_A(t) + 0.5$ và $(m, k) = (2, 2)$. Đường liền nét màu xanh là $L_A(t) + 1.0$ và $(m, k) = (5, 5)$ 47
- 2.7 Sự phụ thuộc của $L_A(t)$ theo λt . Đường đứt nét màu đỏ là $L_A(t)$ ứng với $(m, k) = (0, 0)$, $q = 0, |\xi| = 3$. Đường chấm chấm màu tím là $L_A(t) + 0.5$ ứng với $(m, k) = (2, 2)$, $q = 0, |\xi| = 5$. Đường liền nét màu xanh là $L_A(t) + 1.0$ ứng với $(m, k) = (5, 5)$, $q = 2, |\xi| = 5$ 47
- 2.8 Sự phụ thuộc của $L_{sub}(t)$ theo λt với $q = 0$. Hình (a) $|\xi| = 1$, $(m, k) = (0, 0)$ (đường đứt nét màu đỏ), $(2, 2)$ (đường chấm chấm màu tím), $(5, 5)$ (đường liền nét màu xanh). Hình (b) $(m, k) = (1, 1)$ với $|\xi| = 2$ (đường nét gạch chấm màu đen) và $|\xi| = 5$ (đường liền nét màu xanh). 48

- 2.9 Sự phụ thuộc của $P_e(t)$ theo λt với các tham số (a) $p = q = 0$, $r = 5$, (b) $p = q = 2$, $r = 20$ và bộ (h, k, l) tương ứng với đường nét gạch đỏ $[P_e(t) + 2]$ là $(0, 0, 0)$, đường nét gạch chấm màu xanh lá $[P_e(t) + 1]$ là $(2, 2, 2)$, đường liền nét màu xanh đậm $P_e(t)$ là $(5, 5, 5)$ 53
- 2.10 Sự phụ thuộc của $P_n(t)$ theo λt với các tham số $n = 5$, $r = 10$, $p = q = 2$ và bộ (h, k, l) tương ứng với đường nét gạch đỏ $[P_n(t) + 1.1]$ là $(0, 0, 0)$, đường nét gạch chấm màu xanh lá $[P_n(t) + 0.6]$ là $(1, 1, 1)$, đường liền nét màu xanh đậm $P_n(t)$ là $(3, 3, 3)$ 56
- 2.11 Sự phụ thuộc của $g_{ii}^{(2)}(t)$ theo λt trong các trường hợp (a) $r = 5$, $p = q = 0$, (b) và (c) $r = 10$, $p = q = 2$. Bộ (h, k, l) ứng với đường nét gạch đỏ $g_{ii}^{(2)}(t)$ là $(0, 0, 0)$, đường nét gạch chấm màu xanh lá $g_{ii}^{(2)}(t) + 0.02$ là $(1, 1, 1)$, đường liền nét màu xanh đậm $g_{ii}^{(2)}(t) + 0.04$ là $(3, 3, 3)$ 57
- 2.12 Sự phụ thuộc của $g_{12}^{(2)}(t)$ theo λt với các tham số $r = 10$, $p = q = 2$, và bộ (h, k, l) ứng với đường nét gạch đỏ $g_{12}^{(2)}(t) + 0.06$ là $(0, 0, 0)$, đường nét gạch chấm màu xanh lá $g_{12}^{(2)}(t) + 0.03$ là $(1, 1, 1)$, đường liền nét màu xanh đậm $g_{12}^{(2)}(t)$ là $(3, 3, 3)$. 59
- 3.1 Hàm Wigner của SPAPCS với các tham số $q = 1$, $\sigma = 1$, $|\beta| = 0.3$, $\phi_a = \phi_b = \phi = 0$. Hình (a) là sự phụ thuộc của W theo các thành phần thực và ảo của α với $\xi = 4$ và $(k, l) = (3, 12)$. Hình (b) là sự phụ thuộc của W theo $|\xi|$ với $|\alpha| = 0.5$ và bộ (k, l) là $(0, 0)$ (đường chấm chấm màu đen), $(1, 4)$ (đường liền nét màu xanh đậm), $(2, 8)$ (đường gạch chấm xanh lá) và $(3, 12)$ (đường đứt nét màu đỏ). 65

3.2	Hàm entropy tuyến tính L theo $ \xi $ với $\phi = \pi, \sigma = 1, q = 3$. Trong hình (a) và (b) đường cong $(0, 0)$ tương ứng với PCS, các đường còn lại ứng với SPAPCS. Ở hình (a), các đường đứt nét ứng với trường hợp cố định $l = 4$ và k tăng. Ở hình (b), các đường đứt nét ứng với trường hợp cố định $k = 4$ và l tăng.	66
3.3	Sự phụ thuộc của entropy tuyến tính theo λt trong các trường hợp (a) $\gamma = 0.01$, (b) $\gamma = 0.1$ và (c) $\gamma = 1$ with $ \xi ^2 = 1, q = 0, k = l = 0, \mu_e = \mu_g = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Đường đứt nét màu xanh là $L_A(t)$, đường liền nét màu đỏ là $L_F(t)$ và đường chấm chấm màu đen là $L(t)$	75
3.4	Sự phụ thuộc của entropy tuyến tính theo λt với các tham số cố định $ \xi ^2 = 1, \mu_e = \mu_g = \frac{1}{\sqrt{2}}, q = 0, \sigma = 1$, trường hợp (a) $k = l = 1, \gamma = 0.1$, (b) $k = l = 5, \gamma = 0.1$ và (c) $k = l = 5, \gamma = 1$	76
3.5	Sự phụ thuộc của entropy tuyến tính theo λt với các tham số cố định $k = l = 1, \xi ^2 = 1, q = 0, \mu_e = \mu_g = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sigma = 1$, (a) $\gamma = 0$, (b) $\gamma = 0.1$ và (c) $\gamma = 1$	79
3.6	Sự phụ thuộc của entropy tuyến tính theo λt , $L_{AF_b}(t)$ (đường đứt nét màu xanh) và $L_{F_a}(t)$ (đường liền nét màu đỏ) với $\gamma = 1, \xi ^2 = 1, q = 0, \mu_e = \mu_g = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sigma = 1$ trong các trường hợp (a) $k = l = 2$, (b) $k = l = 3$ và (c) $k = l = 5$	80
4.1	Sự phụ thuộc của F theo λt_2 và μ với $\lambda t_1 = \frac{3\pi}{4}, \xi = 1, q = m = k = 0$	91

- 4.2 Sự phụ thuộc của F theo μ với các tham số cố định $\lambda t_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\lambda t_2 = \frac{5\pi}{4}$, $q = m = k = 0$ cho các trường hợp $|\xi| = 1$ (đường đỏ), $|\xi| = 2$ (đường chấm chấm màu xanh) và $|\xi| = 3$ (đường liền nét màu màu đen). 91
- 4.3 Sự phụ thuộc của F theo μ với các tham số cố định $\lambda t_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\lambda t_2 = \frac{5\pi}{4}$, $|\xi| = 1$, $q = 0$ cho các trường hợp (m, k) bằng $(0, 0)$ (đường đứt nét màu đỏ), $(1, 1)$ (đường chấm chấm màu xanh), và $(2, 2)$ (đường liền nét màu đen). 92
- 4.4 Sự phụ thuộc của F theo λt_2 với $\lambda t_1 = \frac{3\pi}{4}$ trong các trường hợp (a) $|\xi| = 1$, $\mu = 0.3$ và (b) $|\xi| = 2$, $\mu = 0.7$ 93

MỤC LỤC

Trang phụ bìa	i
Lời cam đoan	ii
Lời cảm ơn	iii
Bảng chữ viết tắt	v
Danh mục các hình vẽ	x
Mục lục	xi
PHẦN MỞ ĐẦU	1
PHẦN NỘI DUNG	9
Chương 1 - Cơ sở lý thuyết	9
1.1. Mở đầu	9
1.2. Các trạng thái phi cổ điển hai và ba mode	11
1.2.1. Trạng thái Fock	11
1.2.2. Trạng thái kết hợp đơn mode	12
1.2.3. Trạng thái kết hợp đơn mode thêm photon	14
1.2.4. Trạng thái kết hợp cặp	15
1.2.5. Trạng thái kết hợp cặp thêm photon hai mode	16
1.2.6. Trạng thái kết hợp bộ ba	17
1.2.7. Trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon	18
1.3. Mô hình Jaynes-Cummings	19

1.3.1. Các cấu hình nguyên tử	19
1.3.2. Mô hình Jaynes-Cummings đơn mode	20
1.3.3. Mô hình Jaynes-Cummings hai mode	23
1.4. Các tính chất và các quá trình động trong mô hình Jaynes-Cummings	24
1.4.1. Các tính chất thống kê theo thời gian của trường điện từ đa mode	24
1.4.2. Xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích . .	26
1.5. Tiêu chuẩn định lượng độ rối entropy tuyến tính	29
1.6. Kết luận	30

Chương 2 - Các tính chất và các quá trình động học của các trường đa mode trong mô hình Jaynes-Cummings 33

2.1. Mở đầu	33
2.2. Các tính chất và các quá trình động học của trường ở trạng thái kết hợp cặp thêm photon	33
2.2.1. Hamiltonian toàn phần của hệ nguyên tử-trường trong mô hình Jaynes-Cummings hai mode	33
2.2.2. Toán tử ma trận mật độ của hệ nguyên tử-trường .	34
2.2.3. Các tính chất động học của nguyên tử theo thời gian	37
2.2.4. Các tính chất động lượng tử của trạng thái kết hợp cặp thêm photon	39
2.2.5. Định lượng độ rối theo thời gian	44
2.3. Các tính chất và các quá trình động học của trường ở trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon	49

2.3.1. Hamiltonian toàn phần của hệ nguyên tử-trường trong mô hình Jaynes-Cummings hai mode	49
2.3.2. Toán tử mật độ theo thời gian	51
2.3.3. Các tính chất động học của nguyên tử theo thời gian	52
2.3.4. Các tính chất động lượng tử của trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon	54
2.4. Kết luận	59

Chương 3 - Các tính chất và các quá trình động học của trường hai mode mới trong mô hình Jaynes-Cummings 61

3.1. Mở đầu	61
3.2. Trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon	61
3.2.1. Khái niệm	61
3.2.2. Hàm Wigner	63
3.2.3. Tính chất rối	65
3.3. Các tính chất và các quá trình động học của trường ở trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon trong mô hình Jaynes-Cummings	67
3.3.1. Hamiltonian toàn phần của hệ nguyên tử-trường trong mô hình Jaynes-Cummings hai mode	67
3.3.2. Toán tử ma trận mật độ của hệ nguyên tử-trường .	68
3.3.3. Định lượng độ rối theo thời gian	73
3.4. Kết luận	81

Chương 4 - Ứng dụng của các trạng thái đa mode vào viễn tải

lượng tử	83
4.1. Mở đầu	83
4.2. Viễn tải lượng tử với trường ở trạng thái kết hợp cặp thêm photon	84
4.2.1. Kênh lượng tử rời nguyên tử-trường	84
4.2.2. Viễn tải trạng thái nguyên tử	85
4.3. Kết quả tính số và thảo luận	90
4.4. Kết luận	94
KẾT LUẬN CHUNG	95
Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến các kết quả nghiên cứu của luận án	97
Tài liệu tham khảo	98
Phụ lục	P.1

PHẦN MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong thời đại ngày nay lĩnh vực thông tin liên lạc đang phát triển rất nhanh cùng với sự phát triển vô cùng mạnh mẽ của khoa học và công nghệ. Trong thông tin liên lạc yếu tố xử lý thông tin, tốc độ truyền tin và bảo mật thông tin đã được đặt lên hàng đầu [1]. Trong lĩnh vực này, tính toán lượng tử và truyền thông tin lượng tử đang được các nhà nghiên cứu hàng đầu về lý thuyết cũng như thực nghiệm quan tâm nghiên cứu nhiều vì nó hứa hẹn một cuộc cách mạng mới về kỹ thuật truyền thông lượng tử trong tương lai không xa [2]. Điển hình là giải Nobel Vật Lý năm 2022 đã thuộc về ba nhà khoa học Alain Aspect, John F. Clauser và Anton Zeilinger với các nghiên cứu liên quan đến lĩnh vực lượng tử. Các kết quả của họ đã mở đường cho việc ứng dụng công nghệ mới cũng như lĩnh vực nghiên cứu sâu rộng như máy tính lượng tử, mạng lượng tử và truyền thông lượng tử. Sự ra đời của ngành khoa học thông tin lượng tử và máy tính lượng tử phải kể đến từ khi khái niệm rối lượng tử được Schrödinger đưa ra vào năm 1935 để giải thích nghịch lý Einstein-Podolsky-Rosen [3]. Sau đó, các ý tưởng về hệ thống tính toán lượng tử và máy tính lượng tử lần lượt được đưa ra vào năm 1980 bởi Manin [4] và vào năm 1982 bởi Feynman [5]. Các ý tưởng lý thuyết đó cho đến nay đã bước đầu được hiện thực hoá bởi nhiều quốc gia mạnh về kinh tế và công nghệ như Mỹ, Nga, Anh, Trung Quốc, Pháp và Đức. Tính đến năm 2021, một số nghiên cứu và chế tạo thành công bước đầu các mô hình thử nghiệm về các hệ thống máy tính lượng tử, điển hình như hãng IBM có Q Systems One với 27 qubit, hãng Google có Sycamore với 54 qubit, Đại học Khoa học và Công nghệ Trung Quốc có Zuchongzhi với 66 qubit. Tất cả các mô hình thử nghiệm này đều có tốc độ tính toán

và tính bảo mật vượt xa các siêu máy tính cổ điển mạnh nhất hiện nay như Fugaku, Summit và Sierra. Tuy nhiên chúng vẫn còn bộc lộ nhiều nhược điểm cần phải cải thiện và hoàn thiện hơn nữa về tính ổn định và nhiều vấn đề kỹ thuật khác do số qubit chưa đảm bảo. Ngoài ra, lĩnh vực truyền thông tin lượng tử đã thu được một số thành công bước đầu trong nghiên cứu thực nghiệm như quá trình viễn tải lượng tử thành công các photon và các nguyên tử với các khoảng cách khác nhau, quá trình viễn tải lượng tử thành công hệ các hệ qubit với 5 nguyên tử ở khoảng cách 600 m vào năm 2004 [6], hệ qubit photon với khoảng cách 143 km vào năm 2012 [7]. Đặc biệt, quá trình viễn tải lượng tử đã thực nghiệm thành công từ chùm ánh sáng đến trạng thái dao động của một viên kim cương ở trạng thái vĩ mô vào năm 2016 [8].

Trong lĩnh vực truyền thông lượng tử, các nguồn rối có biến liên tục và biến gián đoạn đóng vai trò hết sức quan trọng trong việc thực hiện các nhiệm vụ lượng tử [9]. Trong các nguồn rối có biến liên tục thì lớp các trạng thái phi cổ điển đóng vai trò then chốt trong việc thực hiện các giao thức lượng tử như mã đậm lượng tử (dense coding) [10], mật mã lượng tử (cryptography) [11], sửa lỗi lượng tử (error correction) [12], phân bố khoá lượng tử (key distribution) [13], đồng viễn tạo trạng thái (joint remote state preparation) [14], hội thoại lượng tử (quantum dialogue) [15] và đặc biệt là viễn tải lượng tử (teleportation) [16]. Các trạng thái phi cổ điển hai mode như trạng thái nén chân không hai mode [17] hoặc trạng thái kết hợp cặp [18] đã được đề xuất. Trên cơ sở hai trạng thái phi cổ điển này, rất nhiều các trạng thái phi cổ điển mới đã được đưa ra và các tính chất phi cổ điển của chúng đã được quan tâm nghiên cứu [19],[20],[21],[22]. Đặc biệt, có một họ các trạng thái phi cổ điển hai mode mới đã được đưa ra dựa vào kỹ thuật thêm photon [23],[24], bớt photon [25],[26], thêm và bớt photon [27],[28],[29] lên hai mode của trạng thái gốc ban đầu là trạng

thái thái nén hai mode và trạng thái kết hợp cặp. Họ các trạng thái này có các tính chất phi cổ điển cao, tính chất rối cao và trở thành các nguồn tài nguyên rối để thực hiện các nhiệm vụ lượng tử như lái lượng tử [30] và viễn tải lượng tử [31],[32]. Bên cạnh đó, từ khi trạng thái kết hợp bộ ba được đưa ra [33] thì có rất nhiều các trạng thái phi cổ điển ba mode mới được đề xuất cũng bằng các kỹ thuật thêm và bớt photon lên trạng thái kết hợp bộ ba gốc và cho các tính chất rối cao cũng như tính chất phi cổ điển vượt trội [34],[35]. Có thể khẳng định, các tính chất phi cổ điển và các ứng dụng của họ các trạng thái phi cổ điển hai và ba mode mới này là các quá trình không phụ thuộc vào thời gian.

Trong các quá trình động lượng tử thì quá trình tương tác một nguyên tử hai mức với một trường điện từ đơn mode thông qua mô hình Jaynes-Cummings (JC) [36] được gọi là một mô hình chuẩn trong quang học lượng tử. Từ mô hình chuẩn này, sự mở rộng của chúng sang tương tác với trường hai mode đã được khảo sát và nghiên cứu [37],[38],[39],[40],[41],[42], như photon của các mode khác nhau của trường được tương quan thành cặp bởi quá trình tương tác với nguyên tử đã gọi là mô hình JC hai mode [35],[36],[40], hoặc mô hình JC hai photon suy biến [43],[44], được đề xuất thông qua biến dạng của mô hình JC hai mode. Trong các mô hình này, các tính chất của trường điện từ ở trạng thái kết hợp và kết hợp cặp trong mô hình JC hai mode và mô hình JC hai photon suy biến không xét đến dịch chuyển Stark đã được nghiên cứu và khảo sát [45],[46],[47],[48],[49],[50],[51]. Ngoài ra, các tính chất của trường hai mode ở trạng thái kết hợp cặp hoặc ba mode ở trạng thái kết hợp bộ ba trong mô hình JC hai mode có xét đến dịch chuyển Stark đã được nghiên cứu ở [36],[52],[53]. Có thể khẳng định rằng, việc đề xuất các trạng thái phi cổ điển đa mode mới, nghiên cứu các tính chất phi cổ điển và áp dụng chúng vào thông tin lượng tử vẫn còn là một vấn đề thời sự. Các tính chất và các quá trình không phụ thuộc vào

thời gian của chúng đã được nghiên cứu nhiều. Tuy nhiên, các tính chất và các quá trình động của các trạng thái phi cổ điển đa mode mới, cụ thể là họ các trạng thái mở rộng của hai mode kết hợp cặp và kết hợp bộ ba vẫn chưa được nghiên cứu nhiều. Để có một cách nhìn toàn diện, chúng tôi đã chọn đề tài "Nghiên cứu các tính chất, các quá trình động và ứng dụng của một số trạng thái phi cổ điển hai và ba mode mới" để làm đề tài nghiên cứu của luận án.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu chung của đề tài là đề xuất được trạng thái phi cổ điển hai mode mới và khảo sát các tính chất của trạng thái mới; nghiên cứu các tính chất và các quá trình động của các trạng thái phi cổ điển hai mode và ba mode mới trong quá trình tương tác với nguyên tử thông qua mô hình JC khi có xét đến và không xét đến ảnh hưởng của môi trường; đánh giá được mức độ thành công của quá trình viễn tải lượng tử với các nguồn rối là kênh lượng tử rối nguyên tử-trường. Trên cơ sở đó, mục tiêu cụ thể của luận án là:

- Đề xuất được trạng thái phi cổ điển hai mode mới bằng phương pháp thêm photon và khảo sát các tính chất phi cổ điển của chúng như tính chất phi Gauss và tính chất rối.

- Làm rõ được các tính chất động lượng tử của quá trình tương tác nguyên tử-trường thông qua mô hình JC khi không xét đến ảnh hưởng của môi trường, trong đó trường ở các trạng thái phi cổ điển hai mode và ba mode mới, như các tính chất động học của nguyên tử, các tính chất động lượng tử của trường, và độ rối giữa nguyên tử và trường.

- Làm rõ được các tính chất động lượng tử của quá trình tương tác nguyên tử-trường thông qua mô hình JC khi có xét đến ảnh hưởng của

môi trường, trong đó trường ở trạng thái phi cổ điển hai mode mới được đề xuất, như định lượng độ rối giữa nguyên tử và trường bằng tiêu chuẩn entropy tuyến tính và phương pháp toán tử mật độ theo thời gian.

- Sử dụng các kênh lượng tử rối nguyên tử-trường vào quá trình viễn tải lượng tử và đánh giá mức độ thành công của quá trình viễn tải thông qua độ trung thực trung bình.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là các trạng thái phi cổ điển, mô hình JC trong tương tác giữa nguyên tử với các trường lượng tử, các tính chất và các quá trình động lượng tử trong mô hình JC, và mô hình viễn tải lượng tử.

Nội dung nghiên cứu của luận án được giới hạn trong phạm vi các trạng thái phi cổ điển hai mode và ba mode mới là những trạng thái phi cổ điển mới được đề xuất trong thời gian gần đây gồm các trạng thái kết hợp cặp, các trạng thái kết hợp bộ ba và các trạng thái thêm photon lên các trạng thái đó; mô hình JC hai mode gồm nguyên tử hai mức hiệu dụng tương tác với các trường hai mode và ba mode mới. Các tính chất động học của nguyên tử được khảo sát thông qua hàm phân bố xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích theo thời gian, các quá trình động lượng tử của trường hai và ba mode mới được khảo sát thông qua hàm phân bố photon theo thời gian và hàm tương quan bậc hai theo thời gian. Định lượng độ rối theo thời gian giữa nguyên tử và các trường hai và ba mode mới thông qua tiêu chuẩn entropy tuyến tính. Nguồn rối được sử dụng trong quá trình viễn tải lượng tử là kênh lượng tử nguyên tử-trường với trường ở các trạng thái phi cổ điển hai mode.

4. Phương pháp nghiên cứu

Trong nghiên cứu các nội dung chính của luận án, chúng tôi đã sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp lượng tử hóa lần thứ hai được sử dụng trong đề xuất đưa ra trạng thái hai mode mới, trong tính toán giải tích để nghiên cứu các tính chất, các quá trình động học của các nguyên tử và trường ở các trạng thái phi cổ điển đa mode;

- Phương pháp toán tử mật độ trong nghiên cứu các quá trình động lượng tử của mô hình JC hai mode và định lượng độ rối nguyên tử-trường trong mô hình này;

- Phương pháp thống kê lượng tử được sử dụng khi xây dựng các biểu thức giải tích của độ trung thực trung bình vào đánh giá mức độ thành công của quá trình viễn tải lượng tử;

- Phương pháp tính số và vẽ đồ thị bằng phần mềm Mathematica để đánh giá các kết quả trong các nội dung nghiên cứu chính của đề tài.

5. Điểm mới của luận án

Luận án nghiên cứu về các tính chất, các quá trình động của các trạng thái phi cổ điển hai và ba mode mới và áp dụng các trạng thái phi cổ điển vào quá trình viễn tải lượng tử. Do đó, các điểm mới của luận án gồm

- Đã đưa ra được trạng thái phi cổ điển hai mode mới bằng phương pháp thêm photon không định xứ và làm rõ được các tính chất của trạng thái hai mode mới gồm tính chất phi Gauss và tính chất rối giữa các mode;

- Đã làm rõ được các tính chất động học của nguyên tử và các quá trình động của trường ở các trạng thái phi cổ điển hai mode và ba mode mới trong mô hình JC khi không xét đến ảnh hưởng của môi trường, và định lượng được độ rối giữa nguyên tử và trường hai mode và ba mode mới theo thời gian;

- Đã làm rõ được các quá trình động của trường ở trạng thái phi cổ điển hai mode mới trong mô hình JC khi có xét đến ảnh hưởng của môi trường thông qua việc định lượng được độ rối giữa nguyên tử và trường hai mode mới theo thời gian;

- Đã chỉ ra được sự thành công của quá trình viễn tải lượng tử với nguồn rối là kênh lượng tử nguyên tử-trường.

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của luận án

Việc đề xuất trạng thái hai mode mới bằng phương pháp thêm photon không định xứ và nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái mới này góp phần hoàn thiện cơ sở lý thuyết về phương pháp thêm photon vào các trạng thái gốc ban đầu, trạng thái mới được tạo thành với các tính chất phi cổ điển được tăng cường sẽ là nguồn ứng dụng quan trọng trong thực hiện các nhiệm vụ lượng tử.

Việc nghiên cứu các tính chất và các quá trình động học của nguyên tử và trường trong tương tác nguyên tử-trường khi có xét và không xét đến ảnh hưởng của môi trường góp phần bổ sung cơ sở lý thuyết về các quá trình động học trong mô hình JC.

Việc khảo sát định lượng độ rối theo thời gian giữa nguyên tử và trường góp phần bổ sung các nguồn rối hiệu quả cụ thể là nguồn rối nguyên tử-trường trong thực hiện các nhiệm vụ lượng tử.

Việc thực hiện viễn tải lượng tử với kênh lượng tử rối nguyên tử-trường góp phần cải tiến và hoàn thiện các mô hình lý thuyết về viễn tải lượng tử, từ đó cung cấp thông tin cho vật lý thực nghiệm trong các quá trình viễn tải lượng tử.

7. Bố cục của luận án

Bố cục luận án gồm ba phần: phần mở đầu, phần nội dung và phần kết luận. Ngoài ra còn có danh mục ký hiệu viết tắt, danh sách hình vẽ, danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến các kết quả nghiên cứu của luận án, tài liệu tham khảo và phụ lục.

- Phần mở đầu trình bày lý do chọn đề tài, mục tiêu nghiên cứu, đối tượng và phạm vi nghiên cứu, phương pháp nghiên cứu, những đóng góp mới của luận án, ý nghĩa khoa học và thực tiễn của luận án, bố cục luận án.

- Phần nội dung bao gồm bốn chương. Chương một trình bày về cơ sở lý thuyết của luận án. Chương hai trình bày về việc khảo sát các tính chất và các quá trình động học của các trạng thái phi cổ điển hai và ba mode. Chương ba trình bày về trạng thái hai mode mới và các quá trình động học của trạng thái mới này. Chương bốn trình bày ứng dụng các trạng thái đa mode vào viễn tải lượng tử.

- Phần kết luận trình bày về những kết quả đã đạt được, đánh giá mức độ đạt được so với mục tiêu đề ra, các ưu nhược điểm của đề tài, hướng khắc phục và phát triển của đề tài.

Các kết quả nghiên cứu của luận án được công bố trong 05 công trình dưới dạng các bài báo khoa học, trong đó 01 bài đã được đăng trên tạp chí chuyên ngành nằm trong hệ thống SCIE (*International Journal of Theoretical Physics*), 01 bài đã được đăng và 01 bài đã được nhận đăng trên tạp chí chuyên ngành trong nước thuộc danh mục ACI (*Hue University Journal of Science: Natural Science, Dalat University Journal of Science*), 01 bài đã được đăng trên tạp chí Khoa học, trường Đại học Sư phạm Huế, và 01 bài đã được đăng trong Kỷ yếu Hội nghị Vật lý Thừa Thiên Huế. Ngoài ra, có 01 bài đã gửi đăng trên tạp chí chuyên ngành quốc tế nằm trong hệ thống SCIE (*Optical and Quantum Electronics*).

PHẦN NỘI DUNG

Chương 1

CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1.1. Mở đầu

Các trạng thái phi cổ điển là các trạng thái thể hiện một hoặc nhiều tính chất phi cổ điển như tính chất nén, tính chất phản kết chùm, tính chất rối, tính chất thống kê sub-Poisson mà có nhiều ứng dụng trong quang học lượng tử và thông tin lượng tử [54]. Lớp các trạng thái phi cổ điển đầu tiên được chỉ ra là các trạng thái nén đã được Stoler đưa ra vào năm 1970 [55] và đã được Kimble khẳng định bằng thực nghiệm [56]. Tiếp đến là họ các trạng thái kết hợp phi tuyến như trạng thái kết hợp cặp [57], trạng thái kết hợp phi tuyến K hạt [58] và trạng thái kết hợp bộ ba [33]. Lớp các trạng thái phi cổ điển kế tiếp với nhiều ứng dụng tiềm năng là các trạng thái thêm/bớt photon lên một trạng thái cổ điển hoặc phi cổ điển nào đó để tăng cường thêm tính chất phi cổ điển của trạng thái ban đầu, chẳng hạn như trạng thái nén dịch chuyển thêm photon hai mode [32], trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm và bớt photon hai mode [28], trạng thái kết hợp bộ ba chồng chất thêm photon [34]. Các trạng thái phi cổ điển mới, đặc biệt là các trạng thái phi cổ điển thêm, bớt photon đã và đang đóng vai trò rất quan trọng trong thời gian gần đây. Do đó, có nhiều trạng thái phi cổ điển mới tiếp tục được đề xuất, nghiên cứu và ứng dụng vào thực hiện các giao thức, các nhiệm vụ trong kỹ thuật truyền thông lượng tử [59].

Có nhiều cách tiếp cận để chỉ ra một trạng thái là cổ điển hay phi cổ điển. Thứ nhất là sử dụng hàm phân bố chuẩn xác suất Glauber-

Sudarshan [60]. Trạng thái là cổ điển khi hàm phân bố xác suất của trạng thái đó nhận các giá trị thông thường. Nếu như hàm Glauber-Sudarshan nhận các giá trị âm hoặc có tính kì dị mạnh hơn tính kì dị của hàm Delta thì đó là trạng thái phi cổ điển [61]. Ngoài ra, trạng thái phi cổ điển cũng được xác định trên cơ sở của hàm Wigner [62]. Đây cũng là một hàm phân bố chuẩn xác suất vì nó có thể nhận giá trị âm. Khi hàm Wigner của một trạng thái nhận giá trị âm, đó là trạng thái phi cổ điển. Tuy nhiên đây chỉ là điều kiện đủ, bởi vì một trạng thái có hàm phân bố Wigner âm thì chắc chắn đó là trạng thái phi cổ điển, nhưng trạng thái phi cổ điển không nhất thiết phải có hàm Wigner âm, trạng thái nén là một ví dụ cho trường hợp này [63]. Còn khi xét đến tính thống kê của hàm phân bố photon, chúng ta có thể sử dụng hàm tương quan bậc hai để xét đến tính chất phản kết chùm của photon mà đặc trưng cho các trạng thái phi cổ điển [64].

Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày các trạng thái phi cổ điển như trạng thái kết hợp đơn mode thêm photon, trạng thái kết hợp cặp, trạng thái kết hợp cặp thêm photon tổng quát, trạng thái kết hợp bộ ba và trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon. Đây là các trạng thái được chúng tôi nghiên cứu trong quá trình chúng tương tác với nguyên tử trong mô hình JC. Trước khi làm rõ các tính chất phi cổ điển của các trạng thái trên, chúng tôi trình bày về trạng thái Fock và trạng thái kết hợp đơn mode. Tiếp theo, chúng tôi trình bày về mô hình JC là một mô hình diễn tả sự tương tác giữa ánh sáng và vật chất. Chúng tôi phân loại các mô hình JC gồm đơn mode và đa mode với nguyên tử là nguyên tử hai mức hiệu dụng và trường chính là các trường phi cổ điển đã được mô tả ở các tiểu mục trước đó. Đây là mô hình cơ sở để chúng tôi tiếp tục khảo sát các quá trình động lượng tử xảy ra theo thời gian khi nguyên tử tương tác với trường.

1.2. Các trạng thái phi cổ điển hai và ba mode

1.2.1. Trạng thái Fock

Trạng thái Fock hay còn gọi là trạng thái số hạt $|n\rangle$ mà được xây dựng từ kết quả của quá trình lượng tử hóa lần thứ hai. Đây là trạng thái có số hạt xác định và được khái quát từ trạng thái chân không. Trạng thái Fock được thu bằng cách tác dụng liên tục các toán tử sinh lên trạng thái chân không,

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{+n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (1.1)$$

trong đó $|0\rangle$ là trạng thái chân không, $\hat{a}^+$ là toán tử sinh và n là số nguyên không âm. Đây chính là trạng thái riêng của toán tử số hạt $\hat{N}$ với trị riêng tương ứng n thỏa mãn phương trình trị riêng

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle, \quad (1.2)$$

với $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$. Các trạng thái Fock phải thỏa mãn điều kiện trực chuẩn và đầy đủ, nghĩa là

$$\langle m | n \rangle = \delta_{m,n} \quad \text{và} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1, \quad (1.3)$$

trong đó $\delta_{m,n}$ là hàm delta-Kronecker.

Khi tác dụng nhiều lần toán tử sinh hoặc hủy hạt lên trạng thái Fock, ta được

$$\begin{aligned} \hat{a}^{+m} |n\rangle &= \frac{\sqrt{(n+m)!}}{\sqrt{n!}} |n+m\rangle, \\ \hat{a}^k |n\rangle &= \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n-k)!}} |n-k\rangle, \end{aligned} \quad (1.4)$$

trong đó m, n và k là các số nguyên dương, k thỏa mãn điều kiện $0 < k < n$, và các toán tử sinh, hủy thỏa mãn các hệ thức giao hoán

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, [\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^+, \hat{a}^+] = 0. \quad (1.5)$$

Do các tính chất tiện lợi của trạng thái Fock, nên các trạng thái phi cổ điển thường được biểu diễn qua trạng thái này. Đồng thời với tính chất của các toán tử sinh, hủy trong biểu thức (1.4), kỹ thuật thêm (bớt) photon được áp dụng lên các trạng thái Fock để tạo ra các trạng thái phi cổ điển với các tính chất phi cổ điển được tăng cường [65]. Điều này rất quan trọng khi thực hiện các nhiệm vụ lượng tử.

1.2.2. Trạng thái kết hợp đơn mode

Trạng thái kết hợp đơn mode được tạo thành bằng cách tác dụng toán tử dịch chuyển lên trạng thái chân không như sau:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle, \quad (1.6)$$

trong đó $\hat{D}(\alpha)$ là toán tử dịch chuyển có dạng

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}}, \quad (1.7)$$

với α là một số phức được gọi là tham số dịch chuyển có dạng $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$, biên độ $|\alpha|$ biến thiên từ 0 đến ∞ , φ nằm trong khoảng từ 0 đến 2π (rad). Trạng thái kết hợp này được giới thiệu bởi Glauber [66] và Sudarshan [60] vào năm 1963 để mô tả các tính chất của chùm sáng laser. Trong đó tính chất kết hợp là đặc trưng nổi bật của chùm sáng laser, nên nó còn có tên gọi trên. Tên gọi trạng thái kết hợp đơn mode để phân biệt với trạng thái kết hợp đa mode vì các hạt boson trong trạng thái này dao động cùng một mode.

Trong biểu diễn trạng thái Fock, trạng thái kết hợp có dạng

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (1.8)$$

trong đó $|n\rangle$ là trạng thái Fock được cho trong biểu thức (1.1). Trạng thái kết hợp còn được định nghĩa là trạng thái riêng của toán tử hủy boson với

trị riêng α , nghĩa là thỏa mãn phương trình trị riêng

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.9)$$

Áp dụng biểu thức (1.8), ta xác định được xác suất tìm n photon trong trạng thái kết hợp

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (1.10)$$

Đây là hàm phân bố Poisson vì nó luôn nhận giá trị trong đoạn từ 0 đến 1.

Để biết được trạng thái kết hợp $|\alpha\rangle$ thuộc lớp các trạng thái cổ điển hay phi cổ điển, chúng tôi sử dụng định nghĩa của hàm phân bố chuẩn xác suất Glauber-Sudarshan [60]. Hàm phân bố $P(\alpha)$ của trạng thái $\hat{\rho}$ là hệ số khai triển của trạng thái trong biểu diễn trạng thái kết hợp

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha, \quad (1.11)$$

thỏa mãn điều kiện $\int P(\alpha) d^2\alpha = 1$. Sở dĩ $P(\alpha)$ được gọi là hàm phân bố chuẩn xác suất vì ngoài các tính chất tương tự hàm phân bố xác suất thông thường, hàm này có thể nhận các giá trị âm hoặc có tính kì dị mạnh hơn tính kì dị của hàm delta. Các trạng thái cổ điển là các trạng thái có hàm phân bố $P(\alpha)$ nhận các giá trị thông thường. Đối với các trạng thái phi cổ điển, $P(\alpha)$ nhận các giá trị âm hoặc có tính kì dị cao.

Đối với trạng thái kết hợp $|\beta\rangle$, hàm Glauber-Sudarshan $P(\alpha)$ là hàm delta $\delta^{(2)}(\alpha - \beta)$. Theo tính chất của hàm delta đây là giới hạn cuối cùng của hàm phân bố cổ điển. Do đó trạng thái kết hợp thuộc lớp các trạng thái cổ điển. Tuy nhiên các tính chất của nó đều nằm ở giới hạn cuối cùng có thể chấp nhận được theo quan điểm cổ điển nên ánh sáng kết hợp được xem là ranh giới giữa ánh sáng cổ điển và phi cổ điển. Chính vì vậy trạng thái kết hợp được sử dụng để tạo ra các trạng thái phi cổ điển, ví dụ với kỹ thuật thêm/bớt photon lên trạng thái kết hợp đã tạo ra các trạng thái phi cổ điển mới với nhiều tính chất phi cổ điển được tăng cường [18],[33],[67].

1.2.3. Trạng thái kết hợp đơn mode thêm photon

Trạng thái kết hợp đơn mode thêm photon $|\alpha, k\rangle$ là trạng thái được tạo ra bằng cách tác dụng toán tử sinh photon liên tiếp lên trạng thái kết hợp đơn mode. Trạng thái này được Agarwal và cộng sự đề xuất vào năm 1991 [67], có dạng như sau:

$$|\alpha, k\rangle = C_{\alpha, k} \hat{a}^{+k} |\alpha\rangle, \quad (1.12)$$

trong đó $|\alpha\rangle$ là trạng thái kết hợp đơn mode được cho trong biểu thức (1.8), k là số photon cùng mode được thêm vào, nó là số nguyên không âm và hệ số $C_{\alpha, k}$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} C_{\alpha, k} &= \langle \alpha | \hat{a}^k \hat{a}^{+k} | \alpha \rangle = \sum_{l=0}^k \frac{(k!)^2}{[(k-l)!]^2 l!} |\alpha|^{2(k-l)}. \\ &= k! L_k \left(-|\alpha|^2 \right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

với $L_m(x)$ là đa thức Laguerre bậc m theo x .

Trong biểu diễn trạng thái Fock, trạng thái kết hợp đơn mode thêm photon có dạng

$$|\alpha, k\rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{k! L_k \left(-|\alpha|^2 \right)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \sqrt{(n+k)!}}{n!} |n+k\rangle. \quad (1.14)$$

Dưới dạng tường minh này, Agarwal và cộng sự đã chứng minh được trạng thái kết hợp đơn mode thêm photon là trạng thái phi cổ điển với tính thống kê sub-Poisson của photon. Bên cạnh đó, tính chất phi cổ điển càng tăng cường khi số photon được thêm vào nhiều hơn. Trạng thái này cũng đã được tạo ra bằng thực nghiệm bởi Zavatta và cộng sự [68]. Với việc đo hàm Wigner của trạng thái tạo được bằng thực nghiệm và thu được các giá trị âm trong không gian pha đã chứng tỏ đây là một trạng thái phi cổ điển, trùng khớp với lý thuyết mà Agarwal và cộng sự đề xuất.

1.2.4. Trạng thái kết hợp cặp

Xét một trường boson hai mode a và b với các toán tử hủy hai mode tương ứng $\hat{a}$ và $\hat{b}$. Trạng thái kết hợp cặp $|\xi, q\rangle$ được định nghĩa là trạng thái riêng của toán tử hủy cặp photon đồng thời trong hai mode [18] ứng với trị riêng ξ

$$\hat{a}\hat{b}|\xi, q\rangle = \xi|\xi, q\rangle, \quad (1.15)$$

trong đó ξ là một số phức, $\xi = |\xi|e^{i\phi}$ với $|\xi|, \phi$ là các số thực bất kì và số nguyên q là số photon chênh lệch giữa hai mode. Trạng thái kết hợp cặp cũng là trạng thái riêng của toán tử hiệu số photon giữa hai mode, nghĩa là

$$(\hat{a}^+\hat{a} - \hat{b}^+\hat{b})|\xi, q\rangle = q|\xi, q\rangle. \quad (1.16)$$

Trong không gian Fock, trạng thái kết hợp cặp (PCS) có dạng

$$|\xi, q\rangle = \mathcal{N}_q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n+q, n\rangle_{ab}, \quad (1.17)$$

trong đó $|m, n\rangle_{ab} = |m\rangle_a \otimes |n\rangle_b$ là các trạng thái Fock hai mode a, b và hệ số chuẩn hóa $\mathcal{N}_q$. Để đơn giản, chúng tôi bỏ đi các chỉ số a, b trong kí hiệu các trạng thái Fock và viết lại dạng của trạng thái kết hợp cặp trong biểu thức (1.17) như sau:

$$|\xi, q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n |n+q, n\rangle, \quad (1.18)$$

trong đó

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{N}_q \frac{\xi^n}{\sqrt{n!(n+q)!}}, \quad (1.19)$$

và hệ số chuẩn hóa

$$\mathcal{N}_q = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} \right]^{-1/2}. \quad (1.20)$$

1.2.5. Trạng thái kết hợp cặp thêm photon hai mode

Trạng thái kết hợp cặp thêm photon hai mode (PAPCS) lần đầu tiên được Hong và cộng sự đề xuất vào năm 1999 trên cơ sở tác dụng liên tiếp các toán tử sinh photon hai mode lên trạng thái kết hợp cặp với số photon ở các mode đều bằng nhau [69]. Sau đó, Yuan và cộng sự đã tổng quát hóa bằng việc đưa ra trạng thái kết hợp cặp thêm photon tổng quát (GPAPCS) [70]. Lập lại liên tiếp việc tác dụng toán tử sinh hai mode với số photon tạo ra ở hai mode khác nhau lên trạng thái kết hợp cặp, các tác giả đã thu được dạng của GPAPCS như sau:

$$\begin{aligned} |\xi, q; m, k\rangle &= \mathcal{N}_{q;m,k} \hat{a}^{+m} \hat{b}^{+k} |\xi, q\rangle \\ &= \mathcal{C}_{q;m,k} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_n |n + q + m, n + k\rangle, \end{aligned} \quad (1.21)$$

trong đó m, k là số photon tương ứng được thêm vào hai mode a, b và các hệ số có dạng

$$\mathcal{C}_{q;m,k} = \mathcal{N}_q \mathcal{N}_{q;m,k} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n} (n + q + m)! (n + k)!}{[n!(n + q)!]^2} \right]^{-1/2}, \quad (1.22)$$

và

$$\mathcal{R}_n = \frac{\xi^n}{n!(n + q)!} \sqrt{(n + q + m)! (n + k)!}. \quad (1.23)$$

Trong biểu thức (1.21), nếu chọn $m = k$ thì GPAPCS chính là trạng thái kết hợp cặp thêm photon hai mode mà Hong và cộng sự đã đề xuất [69]. Trong trường hợp đặc biệt $m = k = 0$, thì GPAPCS trở thành PCS trong biểu thức (1.18). Từ biểu thức (1.21), chúng ta có xác suất tìm $(n + q + m)$ photon ở mode a và $(n + k)$ photon ở mode b tại $t = 0$ là

$$P_{n,q;m,k}(0) = |\langle n + k, n + q + m | \xi, q; m, k \rangle|^2 = \mathcal{C}_{q;m,k}^2 |\mathcal{R}_n|^2, \quad (1.24)$$

trong đó $\mathcal{C}_{q;m,k}$ và $\mathcal{R}_n$ được xác định trong các biểu thức (1.22) và (1.23).

1.2.6. Trạng thái kết hợp bộ ba

Trạng thái kết hợp bộ ba (TCS) của trường boson ba mode a, b và c là trạng thái riêng của tích bộ ba toán tử hủy $\hat{a}\hat{b}\hat{c}$ và các toán tử hiệu số hạt [33] được xác định bởi các biểu thức sau:

$$\begin{aligned}\hat{a}\hat{b}\hat{c}|\xi, p, q\rangle &= \xi|\xi, p, q\rangle, \\ (\hat{N}_a - \hat{N}_b)|\xi, p, q\rangle &= p|\xi, p, q\rangle, \\ (\hat{N}_b - \hat{N}_c)|\xi, p, q\rangle &= q|\xi, p, q\rangle,\end{aligned}\tag{1.25}$$

trong đó p và q là các số nguyên. Trong biểu diễn các trạng thái Fock, trạng thái kết hợp bộ ba có dạng

$$|\xi, p, q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n(\xi) |n_a, n_b, n_c\rangle, \tag{1.26}$$

trong đó $|n_a, n_b, n_c\rangle = |n+p+q\rangle_a \otimes |n+q\rangle_b \otimes |n\rangle_c$ là tích của các trạng thái số hạt trong không gian Fock của ba mode a, b, c và hệ số khai triển $\mathcal{C}_n(\xi)$ được xác định

$$C_n(\xi) = N_{p,q}(r) \xi^n (n_a! n_b! n_c!)^{-1/2}, \tag{1.27}$$

với

$$N_{p,q}^{-2}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} (n_a! n_b! n_c!)^{-1}, \tag{1.28}$$

và các tham số r, ξ liên hệ với nhau qua biểu thức $\xi = r e^{i\phi}$ trong đó r, ϕ là các số thực. Xác suất tìm đồng thời $(n+p+q)$ photon ở mode a , $(n+q)$ photon ở mode b và n photon ở mode c là

$$P_n(0) = |\langle n_c, n_b, n_a | \xi, p, q \rangle|^2 = |\mathcal{C}_n(\xi)|^2. \tag{1.29}$$

Một số tính chất phi cổ điển của trạng thái kết hợp bộ ba đã được nghiên cứu [33] với các sơ đồ thực nghiệm tạo ra trạng thái này cũng đã được đề xuất [71]. Trạng thái kết hợp bộ ba cũng đã được ứng dụng vào viễn tải lượng tử một trạng thái kết hợp dựa trên giao thức của Janszky và cộng sự [72].

1.2.7. Trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon

Tương tự trạng thái kết hợp cặp thêm photon, trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon (PATCS) đã được đề xuất [34] bằng cách tác dụng liên tục các toán tử sinh photon lên ba mode của trạng thái kết hợp bộ ba như sau:

$$|\xi, p, q; h, k, l\rangle = \mathcal{N}_{p,q;h,k,l} \hat{a}^{+h} \hat{b}^{+k} \hat{c}^{+l} |\xi, p, q\rangle, \quad (1.30)$$

với các số nguyên không âm h, k và l là số photon được thêm vào ba mode a, b và c của trạng thái kết hợp bộ ba $|\xi, p, q\rangle$, các toán tử $\hat{a}^+, \hat{b}^+$ và $\hat{c}^+$ là các toán tử sinh photon lên các mode của trường và $\mathcal{N}_{p,q;h,k,l}$ là hệ số khai triển được xác định bởi

$$\mathcal{N}_{p,q;h,k,l}^{-2}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_n^2(r) (n_a + h)! (n_b + k)! (n_c + l)!}{n_a! n_b! n_c!}, \quad (1.31)$$

trong đó $\mathcal{C}_n(r)$ được cho trong biểu thức (1.27). Áp dụng biểu thức (1.26) vào biểu thức (1.30), ta viết lại dạng của PATCS là

$$|\xi, p, q; h, k, l\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_{n;h,k,l}(\xi) |n_a + h, n_b + k, n_c + l\rangle, \quad (1.32)$$

trong đó $\mathcal{C}_{n;h,k,l}(\xi)$ là hệ số khai triển có dạng

$$\mathcal{C}_{n;h,k,l}(\xi) = \mathcal{N}_{p,q;h,k,l}(r) \mathcal{C}_n(\xi) \frac{\sqrt{(n_a + h)! (n_b + k)! (n_c + l)!}}{\sqrt{n_a! n_b! n_c!}}. \quad (1.33)$$

Từ các biểu thức (1.26) và (1.32) dễ dàng suy ra khi $h = k = l = 0$ thì PATCS trở thành TCS. Từ biểu thức (1.32), xác suất tìm $(n_a + h)$ photon ở mode a , $(n_b + k)$ photon ở mode b và $(n_c + l)$ photon ở mode c tại thời điểm $t = 0$ là

$$P_{n;h,k,l}(0) = |\langle n_c + l, n_b + k, n_a + h | \xi, p, q; h, k, l \rangle|^2 = |\mathcal{C}_{n;h,k,l}(\xi)|^2, \quad (1.34)$$

trong đó $\mathcal{C}_{n;h,k,l}(\xi)$ được cho trong biểu thức (1.33). Một số tính chất phi cổ điển của trạng thái này đã được nghiên cứu và chỉ ra vai trò của việc

thêm photon vào trạng thái kết hợp bộ ba ban đầu làm tăng cường các tính chất phi cổ điển hơn nữa [34]. Điều này rất cần thiết khi sử dụng các trạng thái này làm nguồn rối trong quá trình viễn tải lượng tử. Đây cũng là cơ sở để chúng tôi đề xuất trạng thái hai mode mới sẽ được đề cập cụ thể trong chương 3.

1.3. Mô hình Jaynes-Cummings

1.3.1. Các cấu hình nguyên tử

Xét nguyên tử ở trạng thái cơ bản $|g\rangle$ không bức xạ điện từ. Giả sử nguyên tử hấp thụ một photon có tần số ω của một trường điện từ đa mode sao cho chuyển dời năng lượng của nguyên tử chỉ được phép từ mức cơ bản $|g\rangle$ đến mức kích thích $|e\rangle$, đây là trường hợp cộng hưởng. Đồng thời chuyển dời được phép giữa hai trạng thái này là cộng hưởng xa đối với tất cả các tần số khác của trường. Khi đó nguyên tử chỉ tương tác với mode có tần số ω và các chuyển dời chỉ xảy ra giữa $|g\rangle$ và $|e\rangle$. Nguyên tử được xem xét như một nguyên tử hai mức tương tác với trường điện từ đơn mode có tần số ω .

Xét một trường đa mode trong đó có tần số ω_1 là cộng hưởng với chuyển dời giữa hai mức $|e\rangle, |i\rangle$ và một tần số ω_2 là cộng hưởng với chuyển dời giữa hai mức $|g\rangle, |i\rangle$. Giả sử rằng chuyển dời trực tiếp giữa hai mức $|e\rangle$ và $|g\rangle$ bị cấm lưỡng cực. Xem tất cả các chuyển dời từ bất kỳ mức nào trong số ba mức nói ở trên tới bất kỳ mức nào khác (không phải ba mức trên) là không cộng hưởng với các tần số khác của trường. Khi đó nguyên tử có thể được hình dung chỉ có ba mức $|e\rangle, |g\rangle$ và $|i\rangle$ và trường chỉ có hai mode có tần số ω_1 và ω_2 với $\omega_1 \neq \omega_2$.

Một nguyên tử ba mức gồm $|e\rangle, |g\rangle$ và $|i\rangle$ có thể được quy về nguyên

tử có cấu hình hai mức hiệu dụng, trong đó $|i\rangle$ được xem là mức trung gian, khi thỏa mãn điều kiện các tần số ω_1, ω_2 là không cộng hưởng với các chuyển dời tương ứng. Do đó, khi nguyên tử chuyển dời giữa hai mức $|e\rangle$ và $|g\rangle$ thì cần hấp thụ đồng thời hai tần số ω_1 và ω_2 . Trong các tính toán khi nguyên tử tương tác với trường điện từ trong mô hình JC, chúng tôi luôn sử dụng nguyên tử hai mức hiệu dụng do tính tiện lợi của nó. Để đơn giản trong tất cả các tính toán của luận án, chúng tôi xét trong hệ đơn vị $\hbar = c = 1$.

1.3.2. Mô hình Jaynes-Cummings đơn mode

Mô hình JC đơn mode là một mô hình quang học lượng tử mô tả tương tác giữa một nguyên tử hai mức với một trường điện từ đơn mode. Mô hình này lần đầu tiên được đề xuất bởi Jaynes và Cummings vào năm 1963 [36], sau đó đã được thực nghiệm chứng minh [73]. Kể từ đó, mô hình này rất phổ biến trong nghiên cứu khoang điện động lực học lượng tử (QED), mạch QED đặc biệt là trong quá trình thông tin lượng tử vì nó cho kết quả giải tích và dễ dàng mở rộng, đồng thời nó cũng dự đoán chính xác một loạt các thí nghiệm. Bên cạnh đó mô hình này đã cung cấp một cách đơn giản để tạo ra một trạng thái rối cụ thể [74],[75]. Việc mở rộng mô hình JC để tạo ra họ các trạng thái rối khác nhau đã được nghiên cứu rộng rãi chẳng hạn như tương tác giữa trường điện từ đơn mode với các nguyên tử nhiều mức, tương tác giữa các trường điện từ đa mode với nguyên tử hoặc tương tác nguyên tử-trường phụ thuộc cường độ và phụ thuộc thời gian [76],[77],[78].

Tương tác của một trường điện từ $\vec{E}$ với một nguyên tử đơn electron được mô tả bởi Hamiltonian trong phép gần đúng lưỡng cực [64] có dạng

như sau:

$$\hat{H} = \hat{H}_F + \hat{H}_A - e\vec{r}\hat{\vec{E}}, \quad (1.35)$$

trong đó e là điện tích nguyên tố, $\vec{r}$ là toán tử tọa độ của electron trong nguyên tử, các toán tử $\hat{H}_A$ và $\hat{H}_F$ là Hamiltonian của nguyên tử và trường điện từ tự do. Hamiltonian $\hat{H}_F$ được cho dưới dạng các toán tử sinh và toán tử hủy photon

$$\hat{H}_F = \sum_k \omega_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k, \quad (1.36)$$

với ω_k là tần số của photon mode k . Hamiltonian $\hat{H}_A$ có dạng

$$\hat{H}_A = \sum_i E_i \hat{S}_{ii}, \quad (1.37)$$

trong đó các toán tử $\hat{S}_{ij} = |i\rangle \langle j|$ là các toán tử dịch chuyển nguyên tử với $\{|i\rangle\}$ là một tập hợp đủ các hàm riêng của toán tử $\hat{H}_A$ ứng với các trị riêng E_i . Số hạng thứ ba trong vế phải của biểu thức (1.35) mô tả tương tác giữa nguyên tử và trường điện từ có dạng

$$e\vec{r}\hat{\vec{E}} = \sum_{i,j} \sum_k \wp_{ij} \hat{S}_{ij} \vec{\varepsilon}_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 V}} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^+), \quad (1.38)$$

trong đó ϵ_0 là hằng số điện môi trong chân không, $\vec{\varepsilon}_k$ vectơ phân cực đơn vị của trường điện từ và $\wp_{ij} = e \langle i | \vec{r} | j \rangle$ là yếu tố ma trận dịch chuyển lưỡng cực điện. Thay các biểu thức (1.36), (1.37) và (1.38) vào biểu thức (1.35), kết quả thu được Hamiltonian toàn phần của hệ trong phép gần đúng lưỡng cực

$$\hat{H} = \sum_k \omega_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \sum_i E_i \hat{S}_{ii} + \sum_{i,j} \sum_k \lambda_k^{ij} \hat{S}_{ij} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^+), \quad (1.39)$$

trong đó chúng tôi đã đặt hệ số λ_k^{ij} như sau:

$$\lambda_k^{ij} = -\wp_{ij} \vec{\varepsilon}_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 V}}. \quad (1.40)$$

Xét một nguyên tử có hai mức cơ bản và mức kích thích với $i = \{g, e\}$ tương tác với trường điện từ. Theo định nghĩa của yếu tố ma trận dịch chuyển lưỡng cực điện, ta có $\wp_{eg} = \wp_{ge}$. Từ biểu thức (1.40) suy ra $\lambda_k^{eg} = \lambda_k^{ge} = \lambda_k$. Áp dụng biểu thức (1.39), Hamiltonian toàn phần của hệ gồm một nguyên tử hai mức tương tác với trường điện từ có dạng

$$\hat{H} = \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{i=\{e,g\}} E_i \hat{S}_{ii} + \sum_{i,j=\{e,g\}} \sum_k \lambda_k \hat{S}_{ij} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger). \quad (1.41)$$

Áp dụng các tính chất của toán tử dịch chuyển nguyên tử $\hat{S}_{ij}$

$$\sum_{i=\{e,g\}} \hat{S}_{ii} = 1, \quad (1.42)$$

và đặt toán tử $\hat{S}_z = \frac{1}{2} (\hat{S}_{ee} - \hat{S}_{gg})$, Hamiltonian $\hat{H}$ ở biểu thức (1.41) được viết lại

$$\hat{H} = \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \omega_0 \hat{S}_z + \sum_k \lambda_k (\hat{S}_{eg} + \hat{S}_{ge}) (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger), \quad (1.43)$$

trong đó $\omega_0 = E_e - E_g$ là hiệu năng lượng giữa hai mức của nguyên tử và λ_k là hệ số tương tác giữa nguyên tử và photon mode k của trường điện từ, λ_k nhận các giá trị thực.

Thành phần Hamiltonian tương tác trong biểu thức (1.43) bao gồm bốn số hạng. Số hạng $\hat{a}_k^\dagger \hat{S}_{ge}$ mô tả quá trình nguyên tử từ mức kích thích về mức cơ bản và một photon mode k được tạo ra. Số hạng $\hat{a}_k \hat{S}_{eg}$ mô tả quá trình ngược lại, nguyên tử hấp thụ một photon mode k và chuyển từ mức cơ bản lên mức kích thích. Trong cả hai quá trình năng lượng được bảo toàn. Số hạng $\hat{a}_k \hat{S}_{ge}$ mô tả quá trình nguyên tử từ mức kích thích về mức cơ bản và một photon bị hủy, kết quả hệ mất đi một lượng năng lượng xấp xỉ $2\omega_0$. Tương tự, số hạng $\hat{a}_k^\dagger \hat{S}_{eg}$ mô tả quá trình năng lượng của hệ tăng lên một lượng xấp xỉ $2\omega_0$. Bỏ qua các số hạng không bảo toàn năng lượng, tương ứng với phép gần đúng sóng quay, Hamiltonian trong biểu thức (1.43) được viết lại

$$\hat{H} = \sum_k \omega_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \omega_0 \hat{S}_z + \sum_k \lambda_k \left(\hat{S}_{eg} \hat{a}_k + \hat{a}_k^+ \hat{S}_{ge} \right), \quad (1.44)$$

Từ biểu thức (1.44), Hamiltonian tương tác giữa nguyên tử hai mức với trường điện từ trong mô hình JC đơn mode có dạng

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^+ \hat{a} + \omega_0 \hat{S}_z + \lambda \left(\hat{S}_{eg} \hat{a} + \hat{a}^+ \hat{S}_{ge} \right). \quad (1.45)$$

Gọi $\Delta = \omega - \omega_0$ là độ điều hưởng tần số giữa nguyên tử và trường. Biểu thức (1.45) có thể được viết lại thành

$$\hat{H} = (\omega_0 + \Delta) \hat{a}^+ \hat{a} + \omega_0 \hat{S}_z + \lambda \left(\hat{S}_{eg} \hat{a} + \hat{S}_{ge} \hat{a}^+ \right), \quad (1.46)$$

để thể hiện mức độ cộng hưởng hoặc không cộng hưởng tần số giữa nguyên tử và trường đơn mode.

1.3.3. Mô hình Jaynes-Cummings hai mode

Mở rộng cho trường hợp trường hai mode với các tần số ω_1 và ω_2 . Xét một nguyên tử hai mức hiệu dụng với mức cơ bản $|g\rangle$, mức trung gian $|i\rangle$ và mức kích thích $|e\rangle$. Giả sử E_g, E_i và E_e là các mức năng lượng riêng ứng với các trạng thái $|g\rangle, |i\rangle$ và $|e\rangle$, các năng lượng này thỏa mãn điều kiện $E_g < E_i < E_e$. Trong điều kiện cộng hưởng hai photon chính xác, ta có

$$E_i - E_g = \omega_1 - \Delta, \quad E_e - E_i = \omega_2 + \Delta, \quad (1.47)$$

với Δ là độ điều hưởng giữa tần số nguyên tử và trường. Từ biểu thức (1.44), ta có Hamiltonian tương tác của một nguyên tử hai mức hiệu dụng với trường hai mode trong phép gần đúng sóng quay và bỏ qua hiệu ứng Stark có dạng

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^2 \omega_j \hat{a}_j^+ \hat{a}_j + \omega_0 \hat{S}_z + \lambda \left(\hat{S}_{eg} \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{S}_{ge} \right). \quad (1.48)$$

Đây là biểu thức mô tả mô hình JC hai mode. Trường hợp đặc biệt, khi hai mode của trường điện từ có tần số giống nhau $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ thì biểu thức (1.48) trở thành

$$\hat{H} = 2\omega\hat{a}^+\hat{a} + \omega_0\hat{S}_z + \lambda \left(\hat{S}_{eg}\hat{a}^2 + \hat{S}_{ge}\hat{a}^{+2} \right), \quad (1.49)$$

là mô hình JC hai mode suy biến. Mô hình này là một biến dạng của mô hình JC hai mode, trong đó chuyển dời giữa hai mức nguyên tử được thực hiện bởi sự tác động đồng thời của hai photon của cùng một mode.

1.4. Các tính chất và các quá trình động trong mô hình Jaynes-Cummings

1.4.1. Các tính chất thống kê theo thời gian của trường điện từ đa mode

Các tính chất thống kê theo thời gian của trường điện từ đa mode được đặc trưng qua hàm tương quan bậc hai theo thời gian [79] có dạng như sau:

$$g_{ii}^{(2)}(\tau) = \frac{\left\langle \hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(-)}(t+\tau)\hat{E}^{(+)}(t+\tau)\hat{E}^{(+)}(t) \right\rangle}{\left\langle \hat{E}^{(-)}(t)\hat{E}^{(+)}(t) \right\rangle^2}, \quad (1.50)$$

trong đó các toán tử cường độ điện trường $\hat{E}^{(-)}(t)$ và $\hat{E}^{(+)}(t)$ là thành phần tần số âm và dương của trường điện từ tại thời điểm t . Hàm tương quan bậc hai này cung cấp thông tin về xác suất quan sát một cặp photon sao cho một photon được quan sát ở thời điểm t thì photon kia được quan sát ở thời điểm sau đó một khoảng τ tại cùng một vị trí.

Với trạng thái kết hợp, $g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(0) = 1$ nghĩa là các photon xuất hiện độc lập với nhau. Nếu hai photon có xu hướng xuất hiện theo chùm,

nghĩa là $g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$, các photon kết chùm với nhau. Ngược lại nếu $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$ thì các photon có xu hướng phản kết chùm. Đây là một đặc trưng thể hiện tính chất phi cổ điển của các trường điện từ.

Khi lượng tử hóa lần thứ hai, hàm tương quan bậc hai (1.50) trở thành

$$g_{ii}^{(2)}(t) = \frac{\langle \hat{a}_i^+(t) \hat{a}_i^+(t) \hat{a}_i(t) \hat{a}_i(t) \rangle}{\langle \hat{a}_i^+(t) \hat{a}_i(t) \rangle^2}, \quad (1.51)$$

trong đó $\hat{a}_i^+(t)$ và $\hat{a}_i(t)$ là các toán tử sinh và hủy photon phụ thuộc theo thời gian của mode i với $i = \{1, 2\}$. Áp dụng các giao hoán tử của các toán tử sinh, hủy trường boson và thực hiện các phép biến đổi sau

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_i^+(t) \hat{a}_i^+(t) \hat{a}_i(t) \hat{a}_i(t) \rangle &= \langle \hat{n}_i^2(t) \rangle - \langle \hat{n}_i(t) \rangle \\ &= \langle (\Delta \hat{n}_i(t))^2 \rangle + \langle \hat{n}_i(t) \rangle^2 - \langle \hat{n}_i(t) \rangle, \end{aligned} \quad (1.52)$$

trong đó $\langle \hat{n}_i(t) \rangle = \langle \hat{a}_i^+(t) \hat{a}_i(t) \rangle$ là số photon trung bình của mode i phụ thuộc thời gian và $\langle (\Delta \hat{n}_i(t))^2 \rangle$ là phương sai của số photon mode i được xác định bởi

$$\langle (\Delta \hat{n}_i(t))^2 \rangle = \langle \hat{n}_i^2(t) \rangle - \langle \hat{n}_i(t) \rangle^2 \quad (1.53)$$

Áp dụng biểu thức (1.52) vào biểu thức (1.51), hàm tương quan bậc hai theo thời gian được viết lại như sau:

$$g_{ii}^{(2)}(t) = \frac{\langle (\Delta \hat{n}_i(t))^2 \rangle + \langle \hat{n}_i(t) \rangle^2 - \langle \hat{n}_i(t) \rangle}{\langle \hat{n}_i(t) \rangle^2}. \quad (1.54)$$

Khi phương sai của số photon bé hơn trị trung bình của nó thì hàm tương quan bậc hai theo thời gian $g_{ii}^{(2)}(t)$ trong biểu thức (1.54) có giá trị nằm trong khoảng $0 < g_{ii}^{(2)}(t) < 1$, nghĩa là các photon mode i có tính chất phản kết chùm. Tính chất phi cổ điển này cũng liên quan đến thống kê photon sub-Poisson do hàm chuẩn xác suất nhận giá trị âm.

1.4.2. Xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích

Xét hệ gồm một nguyên tử hai mức tương tác với trường điện từ lượng tử đơn mode trong mô hình JC đơn mode. Hamiltonian toàn phần mô tả cho hệ được xác định trong biểu thức (1.45). Tại thời điểm ban đầu, trạng thái của hệ được mô tả bởi

$$|\psi(0)\rangle = |A\rangle \otimes |F\rangle, \quad (1.55)$$

trong đó A là kí hiệu cho nguyên tử hai mức và F là kí hiệu cho trường điện từ lượng tử đơn mode. Để đơn giản, xét nguyên tử ban đầu ở trạng thái kích thích $|e\rangle$ và trường ở trạng thái kết hợp $|\alpha\rangle$ được cho trong biểu thức (1.8).

Để mô tả sự tiến hóa theo thời gian của hệ, chúng tôi sử dụng toán tử Unità tiến hóa theo thời gian có dạng như sau

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t}, \quad (1.56)$$

trong đó $\hat{H}$ là Hamiltonian được xác định trong biểu thức (1.45). Trạng thái của hệ tại thời điểm t có dạng

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle. \quad (1.57)$$

Đến đây, chúng tôi giới thiệu các trạng thái mặc áo (dressed state) là các trạng thái riêng của Hamiltonian tương tác toàn phần của hệ nguyên tử-trường với các trị riêng năng lượng tương ứng. Các trạng thái này là sự kết hợp giữa các trạng thái của nguyên tử và các trạng thái của trường [62]. Khi xác định được các trạng thái mặc áo và các trị riêng năng lượng tương ứng của chúng thì động học của hệ tương tác nguyên tử-trường trở nên đơn giản. Lúc này trạng thái toàn phần của hệ là sự chồng chập của các trạng thái mặc áo. Trong hệ được khảo sát gồm một nguyên tử hai mức tương tác với trường đơn mode, các trạng thái mặc áo là hệ hai vectơ

cơ sở $|e, n\rangle$ và $|g, n+1\rangle$ [64]. Áp dụng các biểu thức (1.45) và (1.56), dạng của toán tử $\hat{U}(t)$ trong hệ hai vectơ cơ sở của trạng thái mặc áo

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_{ee} |e\rangle \langle e| + \hat{U}_{gg} |g\rangle \langle g| + \hat{U}_{eg} |e\rangle \langle g| + \hat{U}_{ge} |g\rangle \langle e|, \quad (1.58)$$

trong đó các yếu tố ma trận $\hat{U}_{ij}$, với $i, j = \{e, g\}$ được xác định

$$\begin{aligned} \hat{U}_{ee} &= \cos \left(\lambda t \sqrt{\hat{a}^+ \hat{a} + 1} \right), & \hat{U}_{gg} &= \cos \left(\lambda t \sqrt{\hat{a}^+ \hat{a}} \right), \\ \hat{U}_{eg} &= -i \frac{\sin \left(\lambda t \sqrt{\hat{a}^+ \hat{a} + 1} \right)}{\sqrt{\hat{a}^+ \hat{a} + 1}} \hat{a}, & \hat{U}_{ge} &= i \frac{\sin \left(\lambda t \sqrt{\hat{a}^+ \hat{a} + 1} \right)}{\sqrt{\hat{a}^+ \hat{a} + 1}} \hat{a}^+. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Áp dụng các biểu thức (1.55), (1.58) và (1.59) vào biểu thức (1.57), chúng ta thu được trạng thái của hệ tại thời điểm t

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}(t) |e, n\rangle + C_{g,n+1}(t) |g, n+1\rangle], \quad (1.60)$$

trong đó

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t) &= C_n(0) \cos \left(\lambda t \sqrt{n+1} \right), \\ C_{g,n+1}(t) &= -i C_n(0) \sin \left(\lambda t \sqrt{n+1} \right), \end{aligned} \quad (1.61)$$

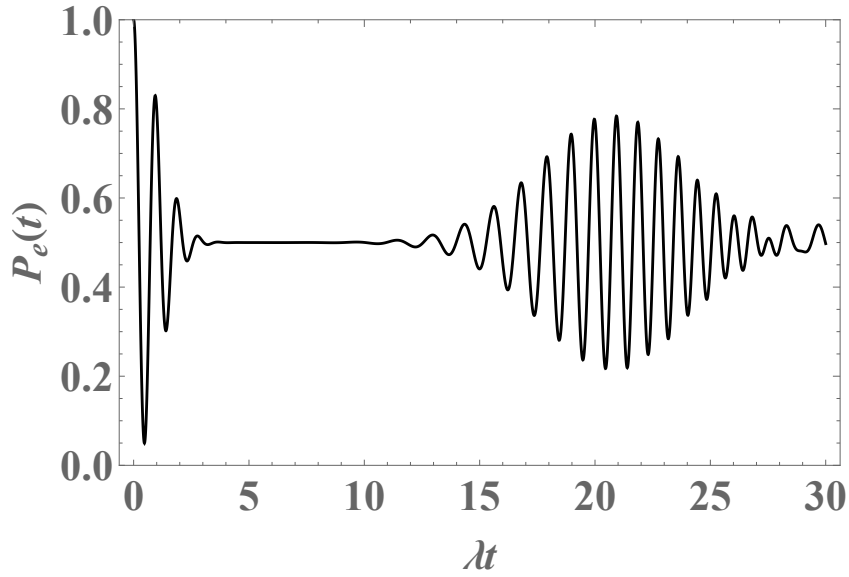
và hệ số $C_n(0)$ được xác định trong biểu thức (1.8)

$$C_n(0) = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (1.62)$$

Xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích $P_e(t)$ theo thời gian

$$P_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_{e,n}(t)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |C_n(0)|^2 \left[1 + \cos \left(2\lambda t \sqrt{n+1} \right) \right]. \quad (1.63)$$

Xác suất $P_e(t)$ phụ thuộc vào phân bố xác suất số photon ban đầu của trường kết hợp $|C_n(0)|^2$. Sử dụng biểu thức (1.63) để vẽ đồ thị hình 1.1 với $|\alpha|^2 = 10$ cho trường ở trạng thái kết hợp tương tác với nguyên tử trong mô hình JC đơn mode. Đồ thị cho thấy sự suy giảm và hồi phục của hàm $P_e(t)$ theo thời gian với tần số Rabi $\lambda\sqrt{n+1}$. Sự suy giảm và hồi phục của



Hình 1.1: Sự phụ thuộc của hàm phân bố xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích $P_e(t)$ theo λt với $|\alpha|^2 = 10$.

hàm $P_e(t)$ được lặp lại theo thời gian tăng dần, với biên độ dao động Rabi giảm và khoảng thời gian diễn ra sự hồi sinh ngày càng tăng và cuối cùng trùng lặp với lần hồi sinh trước đó. Các hiện tượng suy giảm và hồi phục có thể được giải thích từ biểu thức (1.63). Mỗi số hạng trong tổng đại diện cho các dao động Rabi với một giá trị xác định là n . Hàm phân bố photon $|C_n(0)|^2$ xác định trọng số tương đối cho mỗi giá trị của n . Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, nguyên tử được chuẩn bị ở trạng thái xác định và do đó tất cả các số hạng trong tổng là tương quan. Khi thời gian tăng lên, các dao động Rabi liên quan đến các kích thích khác nhau có tần số khác nhau và do đó trở nên không tương quan dẫn đến sự suy giảm của $P_e(t)$. Khi thời gian tăng, mỗi tương quan được khôi phục và sự hồi sinh xảy ra. Hành vi này tiếp tục và thu được một chuỗi vô hạn các lần hồi sinh. Do đó, sự hồi sinh là một hiện tượng lượng tử thuần túy.

1.5. Tiêu chuẩn định lượng độ rối entropy tuyến tính

Trong trường hợp tổng quát, trạng thái của một hệ lượng tử được mô tả bằng toán tử ma trận mật độ có dạng

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi\rangle \langle\psi|, \quad (1.64)$$

trong đó P_i là xác suất để hệ ở trạng thái $|\psi\rangle$. Xét một hệ lượng tử hai thành phần được mô tả bởi toán tử ma trận mật độ $\hat{\rho}$. Ma trận mật độ của hai hệ con A và B là các ma trận mật độ rút gọn của $\hat{\rho}$, được định nghĩa

$$\hat{\rho}_x = \text{Tr}_y \hat{\rho}, \quad (1.65)$$

trong đó $x, y = \{A, B\}$ với $x \neq y$, kí hiệu Tr_x chỉ việc lấy vết theo không gian của thành phần A hoặc B của hệ. Một hệ lượng tử được gọi là có thể tách nếu ma trận mật độ của nó được viết dưới dạng

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i \hat{\rho}_{i,A} \otimes \hat{\rho}_{i,B}. \quad (1.66)$$

Ngược lại nếu $\hat{\rho}$ không thể khai triển thành tổng của tích hai ma trận mật độ thành phần như biểu thức (1.66) thì trạng thái đó được gọi là trạng thái rối.

Định lượng độ rối là phép đo mức độ vướng víu các thành phần trong hệ. Có nhiều tiêu chuẩn định lượng độ rối khác nhau như tiêu chuẩn entropy Von Neumann, tiêu chuẩn độ đồng quy hoặc tiêu chuẩn entropy tuyến tính [79]. Trong luận án này, chúng tôi chỉ sử dụng tiêu chuẩn entropy tuyến tính để định lượng độ rối các thành phần trong hệ. Vì các giá trị của entropy tuyến tính có giới hạn trên và giới hạn dưới cho phép chỉ ra mức độ rối cực đại và cực tiểu của hệ.

Hàm entropy tuyến tính không phụ thuộc thời gian được xác định bởi [80]

$$L = 1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_x^2), \quad (1.67)$$

trong đó $\hat{\rho}_x$ là toán tử mật độ rút gọn của hệ được xác định trong biểu thức (1.65), các giá trị của L luôn nằm từ 0 đến 1. Các thành phần trong hệ đạt độ rối cực đại lý tưởng khi entropy tuyến tính đạt giá trị 1, và các thành phần trong hệ hoàn toàn không rối với nhau khi entropy tuyến tính bằng 0.

Khi xét đến độ rối giữa các thành phần trong hệ theo thời gian, ví dụ độ rối giữa nguyên tử và trường theo thời gian khi chúng tương tác với nhau trong mô hình JC, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn entropy tuyến tính phụ thuộc theo thời gian có dạng [77]

$$L_i(t) = 1 - \text{Tr}[\hat{\rho}_i^2(t)], \quad (1.68)$$

trong đó toán tử $\hat{\rho}_i(t)$ là toán tử mật độ rút gọn của hệ theo thời gian được xác định bởi

$$\hat{\rho}_i(t) = \text{Tr}_j \hat{\rho}(t), \quad (1.69)$$

với $i, j = \{A, F\}$, kí hiệu A dành cho nguyên tử và F dành cho trường điện từ và $\hat{\rho}(t)$ là toán tử ma trận mật độ mô tả sự tiến hóa theo thời gian của hệ. Các giá trị của entropy tuyến tính theo thời gian $L_i(t)$ cũng nằm trong khoảng từ 0 đến 1, nó chỉ ra độ rối giữa trường và nguyên tử theo thời gian. Trường và nguyên tử không rối với nhau nếu $L_i(t) = 0$ và đạt độ rối cực đại lý tưởng nếu $L_i(t) = 1$.

1.6. Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày cơ sở lý thuyết về ba vấn đề quan trọng, làm cơ sở cho các tính toán và khảo sát về sau của luận án,

cụ thể như sau:

Thứ nhất, chúng tôi đã trình bày về một số trạng thái của trường boson, các tính chất phi cổ điển của chúng gồm trạng thái Fock, trạng thái kết hợp thêm photon, trạng thái kết hợp cặp, trạng thái kết hợp cặp thêm photon, trạng thái kết hợp ba và trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon. Chúng tôi nhận thấy với phương pháp thêm photon vào các trạng thái gốc ban đầu sẽ làm tăng cường tính chất phi cổ điển của các trạng thái phi cổ điển. Điều này rất quan trọng vì nó cung cấp nguồn rồi làm cơ sở cho việc thực hiện các nhiệm vụ lượng tử.

Thứ hai, chúng tôi đã trình bày về mô hình JC là mô hình mô tả sự tương tác của nguyên tử và trường lượng tử. Đây là cơ sở cần thiết cho các nghiên cứu trong luận án. Với các tính chất đặc trưng của mô hình này đã được thực nghiệm kiểm chứng như tính chất suy giảm và hồi phục của các xác suất tìm photon, xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích, sự dao động Rabi của nguyên tử, hàm tương quan bậc hai theo thời gian mô tả tính phản kết chùm của photon. Các phương pháp nghiên cứu để đưa ra các tính chất động học này sẽ được dùng để khảo sát tương tác nguyên tử-trường khi trường ở các trạng thái phi cổ điển hai và ba mode trong chương 2 và 3.

Thứ ba, chúng tôi giới thiệu tiêu chuẩn định lượng độ rối không phụ thuộc thời gian giữa các thành phần trong hệ và tiêu chuẩn entropy tuyến tính theo thời gian để định lượng độ rối giữa nguyên tử và trường. Các tiêu chuẩn này cho phép chúng tôi định lượng độ rối giữa các mode của các trường phi cổ điển ở trạng thái dừng và định lượng độ rối giữa các trường phi cổ điển với nguyên tử cũng như giữa một mode của trường với hệ con gồm nguyên tử và mode còn lại. Việc định lượng độ rối là tiêu chí quan trọng để chứng minh độ rối nguyên tử-trường là phù hợp khi sử dụng làm

kênh lượng tử rồi trong viễn tải lượng tử, sẽ được làm rõ trong chương 4.

Chương 2

CÁC TÍNH CHẤT VÀ CÁC QUÁ TRÌNH ĐỘNG HỌC CỦA CÁC TRƯỜNG ĐA MODE TRONG MÔ HÌNH JAYNES-CUMMINGS

2.1. Mở đầu

Trong chương này, chúng tôi sẽ nghiên cứu các tính chất động học của nguyên tử hai mức hiệu dụng và các quá trình động lượng tử của các trường hai và ba mode trong mô hình JC. Các tính chất động học của nguyên tử được khảo sát thông qua hàm phân bố tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích theo thời gian. Các quá trình động lượng tử của các trường đa mode được khảo sát thông qua hàm phân bố số photon và hàm tương quan bậc hai theo thời gian. Đồng thời chúng tôi sẽ định lượng độ rối giữa nguyên tử và trường ở trạng thái kết hợp cặp thêm photon tổng quát và trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon và so sánh với trường hợp khi trường ở trạng thái gốc ban đầu là trạng thái kết hợp cặp và kết hợp bộ ba.

2.2. Các tính chất và các quá trình động học của trường ở trạng thái kết hợp cặp thêm photon

2.2.1. Hamiltonian toàn phần của hệ nguyên tử-trường trong mô hình Jaynes-Cummings hai mode

Trong mục này, chúng tôi khảo sát tương tác nguyên tử-trường trong mô hình JC hai mode gồm một nguyên tử hai mức hiệu dụng tương tác với trường hai mode ở GPAPCS. Nguyên tử gồm có hai mức kích thích $|e\rangle$ và cơ bản $|g\rangle$ trong đó sự dịch chuyển giữa các mức được thực hiện thông

qua quá trình hai photon. Giữa các mức này, nguyên tử còn có mức trung gian $|i\rangle$ mà sự dịch chuyển giữa hai mức $|g\rangle$ và $|i\rangle$, giữa hai mức $|e\rangle$ và $|i\rangle$ là được phép, trong khi dịch chuyển trực tiếp giữa hai mức $|e\rangle$ và $|g\rangle$ bị cấm. Áp dụng biểu thức (1.48), Hamiltonian toàn phần của hệ được viết trong phép gần đúng sóng quay và không xét đến dịch chuyển Stark có dạng như sau:

$$\hat{H} = \omega_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_2 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega \hat{S}_z + \lambda \left(\hat{S}_{eg} \hat{a} \hat{b} + \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{S}_{ge} \right), \quad (2.1)$$

trong đó ω_1 và ω_2 là các tần số tương ứng với hai mode a và b của trường, $\omega = \omega_e - \omega_g$ là tần số của nguyên tử thỏa mãn điều kiện $\omega_e - \omega_i = \omega_1 + \delta$, $\omega_i - \omega_g = \omega_2 - \delta$, với δ là độ điều hưởng của quá trình một photon, λ là hằng số tương tác giữa nguyên tử và trường, các toán tử $\hat{S}_z = \frac{1}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)$, $\hat{S}_{eg} = |e\rangle\langle g|$ và $\hat{S}_{ge} = |g\rangle\langle e|$ là các toán tử dịch chuyển nguyên tử.

Để đơn giản, chúng tôi chọn hệ hai vectơ cơ sở $|e, n + q + m, n + k\rangle$ và $|g, n + q + m + 1, n + k + 1\rangle$. Các hàm riêng của Hamiltonian trong biểu thức (2.1) được viết trong biểu diễn các trạng thái mặc áo [79] như sau:

$$|\psi_n^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, n + q + m, n + k\rangle \pm |g, n + q + m + 1, n + k + 1\rangle). \quad (2.2)$$

Giải phương trình trị riêng của Hamiltonian $\hat{H}$ trong biểu thức (2.1), chúng tôi thu được kết quả các trị riêng tương ứng của Hamiltonian như sau

$$\lambda_n^\pm = \omega_1(n + q + m) + \omega_2(n + k) + \frac{1}{2}\omega \pm \lambda\beta_n, \quad (2.3)$$

trong đó

$$\beta_n = \sqrt{(n + q + m + 1)(n + k + 1)}. \quad (2.4)$$

2.2.2. Toán tử ma trận mật độ của hệ nguyên tử-trường

Xét toán tử Unita tiến hóa theo thời gian được định nghĩa như sau

$$\hat{U}(n, t) = e^{-i\hat{H}t}, \quad (2.5)$$

trong đó $\hat{H}$ chính là Hamiltonian toàn phần của hệ trong biểu thức (2.1). Các kết quả hàm riêng và trị riêng tương ứng của $\hat{H}$ trong các biểu thức (2.2) và (2.3) dẫn đến biểu diễn ma trận của toán tử Unita theo thời gian như sau:

$$\hat{U}(n, t) = \begin{pmatrix} U_{ee}(n, t) & U_{eg}(n, t) \\ U_{ge}(n, t) & U_{gg}(n, t) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

trong đó các yếu tố ma trận được cho bởi

$$\begin{aligned} U_{ee}(n, t) &= U_{gg}(n, t) = \frac{1}{2} \left(e^{-i\lambda_n^+ t} + e^{-i\lambda_n^- t} \right), \\ U_{eg}(n, t) &= U_{ge}(n, t) = \frac{1}{2} \left(e^{-i\lambda_n^+ t} - e^{-i\lambda_n^- t} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Để mô tả sự tiến triển của hệ nguyên tử-trường theo thời gian, chúng tôi sử dụng toán tử ma trận mật độ của hệ theo thời gian $\hat{\rho}(t)$. Giả sử rằng toán tử ma trận mật độ tại thời điểm ban đầu $t = 0$ được kết hợp từ nguyên tử và trường có dạng

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_F(0), \quad (2.8)$$

trong đó nguyên tử ban đầu ở trạng thái bất kì $|A\rangle = \mu|e\rangle + \nu|g\rangle$ và trường $|F\rangle$ ở GPAPCS được xác định trong biểu thức (1.21).

Theo thời gian, toán tử ma trận mật độ $\hat{\rho}(t)$ của hệ nguyên tử-trường có dạng [79]

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= e^{-i\hat{H}t} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t} = \hat{U}(n, t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(n, t) \\ &= \rho_{ee,F}(t) |e\rangle \langle e| + \rho_{eg,F}(t) |e\rangle \langle g| \\ &\quad + \rho_{ge,F}(t) |g\rangle \langle e| + \rho_{gg,F}(t) |g\rangle \langle g|, \end{aligned} \quad (2.9)$$

trong đó các yếu tố ma trận $\hat{\rho}_{ee,F}(t)$, $\hat{\rho}_{eg,F}(t)$, $\hat{\rho}_{ge,F}(t)$ và $\hat{\rho}_{gg,F}(t)$ được xác định như sau:

$$\hat{\rho}_{ee,F}(t) = \mathcal{C}_{q;m,k}^2 \sum_{n,n'=0}^{\infty} \left[|\mu|^2 \mathcal{R}_n \mathcal{R}_{n'}^* U_{ee}(n, t) U_{ee}^*(n', t) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + |\nu|^2 \mathcal{R}_{n+1} \mathcal{R}_{n'+1}^* U_{eg}(n, t) U_{eg}^*(n', t) \\
& + \mu \nu^* \mathcal{R}_n \mathcal{R}_{n'+1}^* U_{ee}(n, t) U_{eg}^*(n', t) + \nu \mu^* \mathcal{R}_{n+1} \mathcal{R}_{n'}^* U_{eg}(n, t) U_{ee}^*(n', t) \Big] \\
& \times |n + q + m, n + k\rangle \langle n' + k, n' + q + m|, \tag{2.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{eg,F}(t) &= \mathcal{C}_{q;m,k}^2 \sum_{n,n'=0}^{\infty} \Big[|\mu|^2 \mathcal{R}_n \mathcal{R}_{n'}^* U_{ee}(n, t) U_{eg}^*(n', t) \\
& + |\nu|^2 \mathcal{R}_{n+1} \mathcal{R}_{n'+1}^* U_{eg}(n, t) U_{eg}^*(n', t) \\
& + \mu \nu^* \mathcal{R}_n \mathcal{R}_{n'+1}^* U_{ee}(n, t) U_{gg}^*(n', t) + \nu \mu^* \mathcal{R}_{n+1} \mathcal{R}_{n'}^* U_{eg}(n, t) U_{eg}^*(n', t) \Big] \\
& \times |n + q + m, n + k\rangle \langle n' + k + 1, n' + q + m + 1|, \tag{2.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{ge,F}(t) &= \mathcal{C}_{q;m,k}^2 \sum_{n,n'=0}^{\infty} \Big[|\mu|^2 \mathcal{R}_n \mathcal{R}_{n'}^* U_{eg}(n, t) U_{ee}^*(n', t) \\
& + |\nu|^2 \mathcal{R}_{n+1} \mathcal{R}_{n'+1}^* U_{gg}(n, t) U_{eg}^*(n', t) \\
& + \mu \nu^* \mathcal{R}_n \mathcal{R}_{n'+1}^* U_{eg}(n, t) U_{eg}^*(n', t) + \nu \mu^* \mathcal{R}_{n+1} \mathcal{R}_{n'}^* U_{gg}(n, t) U_{ee}^*(n', t) \Big] \\
& \times |n + q + m, n + k\rangle \langle n' + k + 1, n' + q + m + 1|, \tag{2.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{gg,F}(t) &= \mathcal{C}_{q;m,k}^2 \sum_{n,n'=0}^{\infty} \Big[|\mu|^2 \mathcal{R}_n \mathcal{R}_{n'}^* U_{eg}(n, t) U_{eg}^*(n', t) \\
& + |\nu|^2 \mathcal{R}_{n+1} \mathcal{R}_{n'+1}^* U_{gg}(n, t) U_{gg}^*(n', t) \\
& + \mu \nu^* \mathcal{R}_n \mathcal{R}_{n'+1}^* U_{eg}(n, t) U_{gg}^*(n', t) + \nu \mu^* \mathcal{R}_{n+1} \mathcal{R}_{n'}^* U_{gg}(n, t) U_{eg}^*(n', t) \Big] \\
& \times |n + q + m, n + k\rangle \langle n' + k + 1, n' + q + m + 1|. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Để khảo sát các tính chất và các quá trình động của trường trong mô hình JC hai mode, chúng tôi sử dụng toán tử mật độ nguyên tử rút gọn $\hat{\rho}_A(t)$ và toán tử mật độ trường rút gọn $\hat{\rho}_F(t)$ được định nghĩa theo biểu thức (1.69), và các yếu tố ma trận của chúng được cho bởi [81]

$$\rho_A^{pl}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle p, n + k, n + q + m | \hat{\rho}(t) | l, n + q + m, n + k \rangle, \tag{2.14}$$

$$\rho_F^{nn'}(t) = \sum_{l=e,g} \langle l, n+k, n+q+m | \hat{\rho}(t) | l, n'+q+m, n'+k \rangle, \quad (2.15)$$

trong đó $p, l = \{e, g\}$. Các yếu tố ma trận được cho trong các biểu thức (2.14) và (2.15) liên quan đến thống kê trường và động học nguyên tử mà sẽ được làm rõ trong các mục tiếp theo.

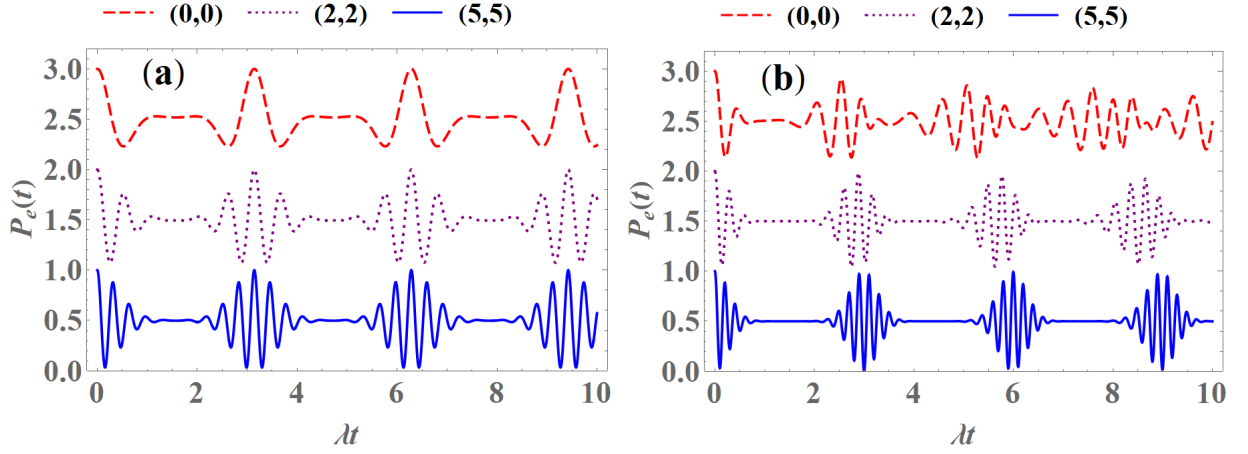
2.2.3. Các tính chất động học của nguyên tử theo thời gian

Dựa vào biểu thức (2.9) của toán tử ma trận mật độ $\hat{\rho}(t)$ thể hiện sự tương tác giữa nguyên tử và trường theo thời gian, chúng tôi tiến hành khảo sát các tính chất động học của nguyên tử thông qua hàm phân bố xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích theo thời gian $P_e(t)$. Trong các tính toán dưới đây, để đơn giản chúng tôi giả sử rằng nguyên tử ban đầu ở trạng thái kích thích. Sử dụng các yếu tố ma trận trên đường chéo của ma trận mật độ nguyên tử rút gọn trong biểu thức (2.14), chúng tôi thu được xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích phụ thuộc theo thời gian $P_e(t)$ như sau:

$$\begin{aligned} P_e(t) &= \rho_A^{ee}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e, n+k, n+q+m | \hat{\rho}(t) | e, n+q+m, n+k \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,q;m,k}(0) \cos^2(\lambda t \beta_n), \end{aligned} \quad (2.16)$$

trong đó $P_{n,q;m,k}(0)$ và β_n được cho bởi các biểu thức (1.24) và (2.4).

Từ biểu thức (2.16), nếu chọn các tham số thỏa mãn điều kiện $m = k$ và $q = 0$ thì $P_e(t)$ dao động tuần hoàn với tần số $\lambda(n+m+1)/\pi$, đó chính là tần số dao động Rabi tương ứng với quá trình hai photon. Tần số này phụ thuộc vào các tham số n và m là số photon được thêm vào hai mode. Ngoài ra, các kết quả tính toán của chúng tôi đã chỉ ra các tính chất của $P_e(t)$ thể hiện rõ rệt nhất khi số photon được thêm vào hai mode của trường bằng nhau. Do đó, trong các khảo sát chúng tôi luôn chọn $m = k$.



Hình 2.1: Sự phụ thuộc của $P_e(t)$ theo λt trong các trường hợp (a) $q = 0, |\xi| = 2$, và (b) $q = 10, |\xi| = 6$. Đường đứt nét màu đỏ ứng với $(P_e(t) + 2)$ và $(m, k) = (0, 0)$, đường chấm chấm màu tím ứng với $(P_e(t) + 1)$ và $(m, k) = (2, 2)$, đường liền nét màu xanh ứng với $P_e(t)$ và $(m, k) = (5, 5)$.

Hình 2.1 mô tả xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích $P_e(t)$ là hàm của λt , trong đó hình 2.1(a) cho trường hợp $q = 0, |\xi| = 2$ và hình 2.1(b) cho trường hợp $q \neq 0, |\xi| = 6$. Khi trường ở PCS ($m = k = 0$), các kết quả thu được là hoàn toàn giống với [81], nghĩa là sự dao động của hàm $P_e(t)$ tuần hoàn theo thời gian và phụ thuộc vào tham số cường độ trường ban đầu $|\xi|$. Khi $|\xi|$ tăng, số dao động trong một chu kỳ cũng tăng lên. Khi trường ở GPAPCS ($m = k \neq 0$), các đường cong chấm chấm màu tím và đường liền nét màu xanh chỉ ra ảnh hưởng của tham số $|\xi|$ và việc thêm photon vào hai mode của trường PCS, trong đó bộ tham số (m, k) là số photon tương ứng được thêm vào hai mode a và b của trường. Khi cố định $|\xi|$ và q , số photon được thêm vào hai mode của trường càng tăng thì số dao động trong mỗi chu kỳ cũng tăng lên và hình dạng của các bó dao động trong một chu kỳ càng quy tắc và đều đặn. Đặc trưng này càng rõ nét khi tham số $|\xi|$ càng tăng (hình 2.1b). Trong trường hợp $q = 0$, hình dạng của các bó dao động thể hiện sự suy giảm và hồi phục có tính chất đối xứng. Khi $q \neq 0$, trường ở PCS thì hình dạng của các bó dao động bắt đầu biến

dạng theo thời gian, sự hồi phục mở rộng và chồng phủ với các chu kì kế tiếp (đường đứt nét màu đỏ trong hình 2.1b). Tuy nhiên, nếu càng thêm photon vào hai mode của trường thì số dao động trong mỗi chu kì tăng lên và hình dạng của các bó dao động càng nhỏ gọn và tuần hoàn. Điều này hoàn toàn khác khi trường ở PCS. Do đó, muốn khắc phục việc mất đối xứng và biến dạng của các dao động $P_e(t)$, chúng tôi đã chỉ ra rằng việc sử dụng trường ở GPAPCS trong mô hình JC hai mode, nghĩa là thêm số photon bằng nhau vào hai mode của trường PCS và tăng cường độ trường ban đầu là cần thiết.

2.2.4. Các tính chất động lượng tử của trạng thái kết hợp cặp thêm photon

Các trường phi cổ điển trong mô hình JC biểu hiện nhiều hiệu ứng phi cổ điển theo thời gian, như sự dao động của hàm phân bố số photon, thống kê photon sub-Poisson, tính chất phản kết chùm. Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu các tính chất động lượng tử của trường GPAPCS trong quá trình tương tác với nguyên tử, đó là hàm phân bố photon theo thời gian $P_n(t)$ và hàm tương quan bậc hai theo thời gian $g_{ii}^{(2)}(t)$ thể hiện sự tương quan giữa các photon cùng mode của GPAPCS.

Áp dụng biểu thức (2.15), các yếu tố trên đường chéo của toán tử ma trận mật độ trường rút gọn $\hat{\rho}_F(t)$ chính là hàm phân bố photon theo thời gian $P_n(t)$ có dạng như sau

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \rho_F^{nn}(t) = \sum_{l=g,e} \langle l, n+k, n+q+m | \hat{\rho}(t) | l, n+q+m, n+k \rangle \\ &= P_{n,q;k,m}(0) \cos^2(\lambda t \beta_n) + P_{n-1,q;k,m}(0) \sin^2(\lambda t \beta_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

trong đó $P_{n,q;k,m}(0)$ và β_n được cho trong các biểu thức (1.24) và (2.4).

Áp dụng biểu thức (1.54), hàm tương quan bậc hai theo thời gian

được viết lại

$$g_{ii}^{(2)}(t) = 1 + \frac{\langle (\Delta \hat{n}_i(t))^2 \rangle - \langle \hat{n}_i(t) \rangle}{\langle \hat{n}_i(t) \rangle^2}, \quad (2.18)$$

trong đó các chỉ số 1, 2 tương ứng với các mode a, b của trường. Hàm $g_{ii}^{(2)}(t)$ luôn nhận các giá trị dương. Khi phương sai của số photon bé hơn trị trung bình của nó thì $g_{ii}^{(2)}(t)$ trong biểu thức (2.18) có giá trị nằm trong khoảng từ 0 đến 1, nghĩa là các photon mode i có tính chất phản kết chùm. Tính chất phi cổ điển này liên quan đến thống kê photon sub-Poisson. Nếu giá trị của $g_{ii}^{(2)}(t)$ lớn hơn 1, nghĩa là các photon mode i có tính chất kết chùm [79].

Để tính trị trung bình của một toán tử bất kỳ phụ thuộc thời gian, chúng tôi sử dụng biểu thức [79]

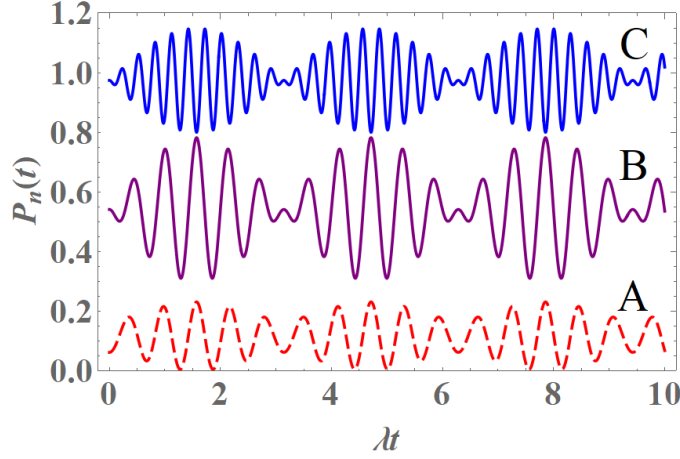
$$\langle \hat{O}(t) \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho}(t) \hat{O}(0)], \quad (2.19)$$

trong đó $\hat{O}(0)$ là một toán tử bất kỳ không phụ thuộc thời gian và $\hat{O}(t)$ là toán tử tại thời điểm t . Áp dụng các biểu thức (2.9), (2.17) vào biểu thức (2.19), số photon trung bình của mode i được xác định bởi

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_i(t) \rangle &= \text{Tr}[\hat{\rho}(t) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) n_i \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,q;k,m}(0) n_i + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,q;k,m}(0) \sin^2(\lambda t \beta_n), \end{aligned} \quad (2.20)$$

và trung bình của bình phương số photon của mode i có dạng

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_i^2(t) \rangle &= \text{Tr}[\hat{\rho}(t) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) n_i^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,q;k,m}(0) n_i^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,q;k,m}(0) n_i \sin^2(\lambda t \beta_n) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,q;k,m}(0) \sin^2(\lambda t \beta_n), \end{aligned} \quad (2.21)$$

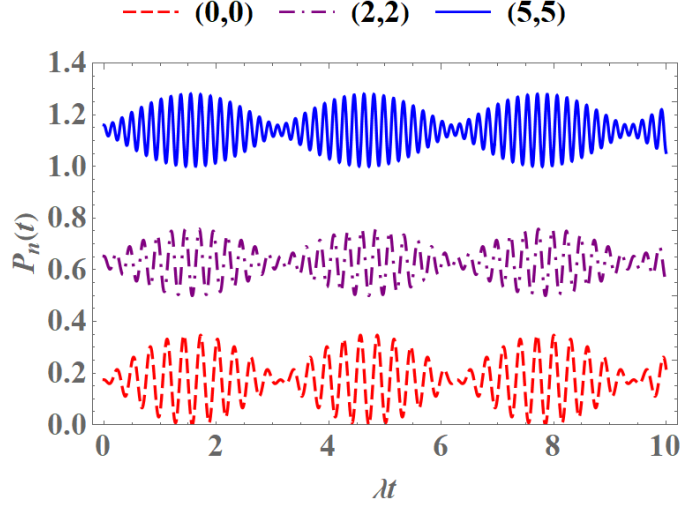


Hình 2.2: Sự phụ thuộc của $P_n(t)$ theo λt cho trường ở PCS ($m = k = 0, q = 0$). Đường A ứng với $P_n(t)$, $n = 5, |\xi| = 3$. Đường B ứng với $P_n(t) + 0.3$, $n = 5, |\xi| = 5$. Đường C ứng với $P_n(t) + 0.8$, $n = 10, |\xi| = 10$.

trong đó $P_{n,q;k,m}(0)$ và β_n được cho trong các biểu thức (1.24), (2.4) và n_i là số photon mode i của trường. Thay các biểu thức (2.20) và (2.21) vào biểu thức (2.18), chúng ta thu được kết quả chi tiết của hàm tương quan bậc hai theo thời gian $g_{ii}^{(2)}(t)$ như sau:

$$\begin{aligned}
 g_{ii}^{(2)}(t) &= \frac{\langle \hat{n}_i^2(t) \rangle - \langle \hat{n}_i(t) \rangle^2}{\langle \hat{n}_i(t) \rangle^2} \\
 &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,q;k,m}(0) n_i^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,q;k,m}(0) n_i \sin^2(\lambda t \beta_n) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,q;k,m}(0) n_i \right] \\
 &\quad \times \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,q;k,m}(0) n_i + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,q;k,m}(0) \sin^2(\lambda t \beta_n) \right]^{-2}. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

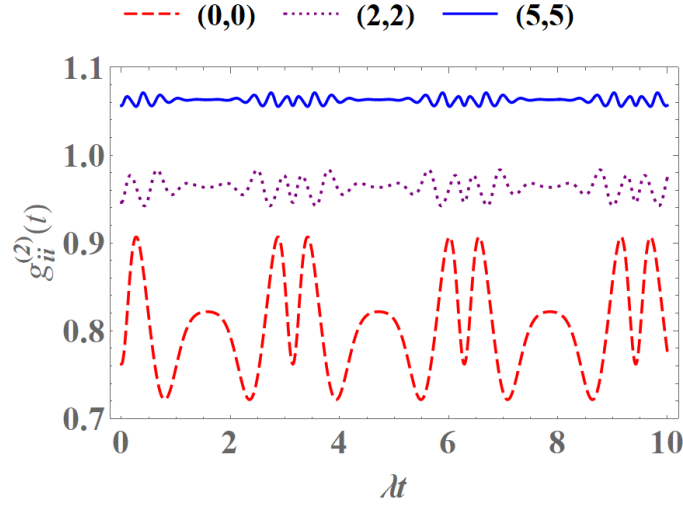
Hình 2.2 và 2.3 mô tả sự phụ thuộc của hàm phân bố số photon $P_n(t)$ theo thời gian được xác định trong biểu thức (2.17). Hình 2.2 mô tả cho trường PCS với $m = k = 0$. Đồ thị cho thấy $P_n(t)$ dao động tuần hoàn theo thời gian. Khi tăng cường độ trường ban đầu $|\xi|$ thì biên độ dao động của $P_n(t)$ cũng tăng lên và các chu kỳ dao động càng rõ nét (đường A, B trong



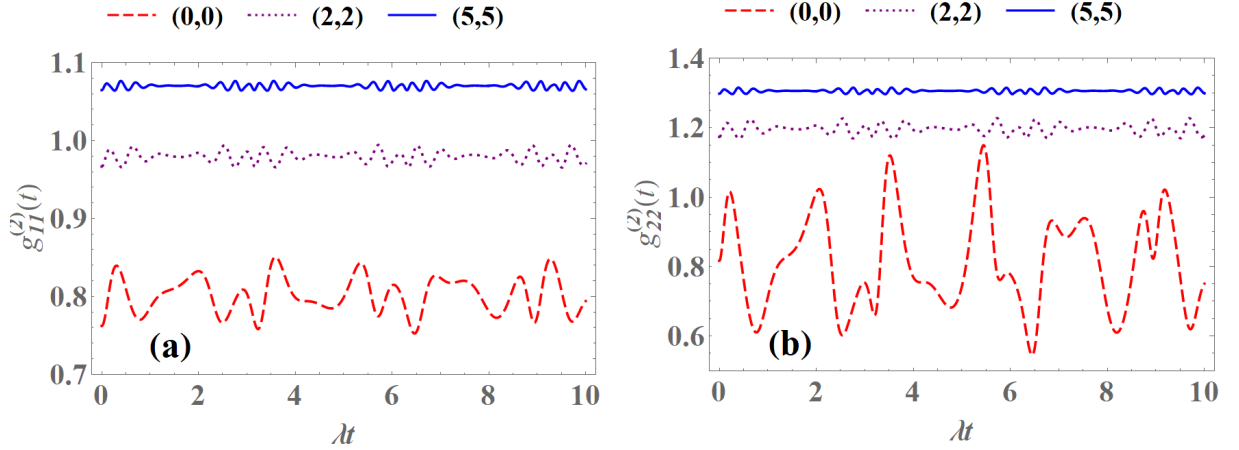
Hình 2.3: Sự phụ thuộc của $P_n(t)$ theo λt với $n = 10, |\xi| = 10$. Đường đứt nét màu đỏ ứng với $P_n(t)$ và $(m, k) = (0, 0)$, đường nét gạch chấm màu tím ứng với $P_n(t) + 0.5$ và $(m, k) = (2, 2)$, đường liền nét màu xanh ứng với $P_n(t) + 1$ và $(m, k) = (5, 5)$.

hình 2.2). Khi tăng đồng thời số photon trung bình ban đầu của trường và $|\xi|$ thì tính chất dao động của $P_n(t)$ càng rõ nét, số dao động trong mỗi chu kì tăng lên, các bó dao động trong mỗi chu kì càng rõ ràng hơn (đường C trong hình 2.2). Hình 2.3 cho phép so sánh sự dao động theo thời gian của $P_n(t)$ khi trường ở PCS và GPAPCS. Đường đứt nét màu đỏ ứng với trường PCS, đường nét gạch chấm màu tím và đường liền nét màu xanh ứng với trường GPAPCS. Khi càng thêm photon vào hai mode của trường, chu kì dao động của $P_n(t)$ càng rõ nét, số dao động trong mỗi chu kì và biên độ dao động càng tăng lên. Do đó, chúng tôi nhận thấy việc thêm số photon bằng nhau vào hai mode của trường PCS và tăng cường độ trường ban đầu cũng như số photon trung bình ban đầu sẽ thể hiện rõ nét các tính chất dao động của hàm phân bố số photon theo thời gian.

Hình 2.4 mô tả sự phụ của hàm tương quan bậc hai $g_{ii}^{(2)}(t)$ theo thời gian trong hai trường hợp, trường ở PCS (các đường đứt nét màu đỏ) và trường ở GPAPCS (các đường chấm chấm màu tím và đường liền nét màu xanh). Hình vẽ cho thấy $g_{ii}^{(2)}(t)$ dao động tuần hoàn theo thời gian. Điều



Hình 2.4: Sự phụ thuộc của hàm $g_{ii}^{(2)}(t)$ theo λt với $|\xi| = 2$, $q = 0$. Đường đứt nét màu đỏ ứng với $g_{ii}^{(2)}(t)$ và $(m, k) = (0, 0)$, đường chấm chấm màu tím ứng với $g_{ii}^{(2)}(t) + 0.1$ và $(m, k) = (2, 2)$, đường liền nét màu xanh ứng với $g_{ii}^{(2)}(t) + 0.15$ và $(m, k) = (5, 5)$.



Hình 2.5: Sự phụ thuộc của hàm $g_{ii}^{(2)}(t)$ theo λt với $|\xi| = 2$, $q = 2$, Hình b (đường đứt nét màu đỏ $g_{11}^{(2)}(t)$), (đường chấm chấm màu tím $g_{11}^{(2)}(t) + 0.1$), (đường liền nét màu xanh $g_{11}^{(2)}(t) + 0.15$). Hình c (đường đứt nét màu đỏ $g_{22}^{(2)}(t)$) (đường chấm chấm màu tím $g_{22}^{(2)}(t) + 0.35$), (5, 5) (đường liền nét màu xanh $g_{11}^{(2)}(t) + 0.4$). Đường đứt nét màu đỏ ứng với $(m, k) = (0, 0)$, đường chấm chấm màu tím ứng với $(m, k) = (2, 2)$, đường liền nét màu xanh ứng với $(m, k) = (5, 5)$.

này hoàn toàn khác với trường hợp khi trường ở trạng thái dừng chỉ là đường cong tuyến tính [18], [70]. Hàm $g_{ii}^{(2)}(t)$ biểu hiện tính chất phản kết chùm của photon mode i theo thời gian khi giá trị của nó nằm trong khoảng

từ 0 đến 1. Khi trường ở PCS, trường hợp $q = 0$ nghĩa là số photon trong hai mode là như nhau, ta có $g_{ii}^{(2)}(t) = g_{11}^{(2)}(t) = g_{22}^{(2)}(t)$, các photon trong các mode a và b đều phản kết chùm. Khi càng tăng số photon thêm vào hai mode của trường, giá trị của $g_{ii}^{(2)}(t)$ càng tăng nhưng vẫn nằm trong khoảng từ 0 đến 1, nghĩa là các photon trong mỗi mode của trường vẫn thể hiện tính chất phản kết chùm tuần hoàn theo thời gian, đồng thời số dao động trong mỗi chu kì cũng tăng lên.

Hình 2.5 tương tự hình 2.4 nhưng được khảo sát trong trường hợp $q \neq 0$, nghĩa là $g_{11}^{(2)}(t) \neq g_{22}^{(2)}(t)$. Khi trường ở PCS, sự dao động của các hàm tương quan bậc hai $g_{11}^{(2)}(t)$ và $g_{22}^{(2)}(t)$ không còn tuần hoàn và đối xứng (các đường đứt nét màu đỏ), thậm chí các photon mode b tại một vài thời điểm không còn tính chất phản kết chùm (hình 2.5b). Tuy nhiên, khi thêm đồng thời photon vào hai mode của trường ở GPAPCS, chu kì dao động của $g_{ii}^{(2)}(t)$ trở nên nhỏ gọn, tuần hoàn và các giá trị của nó vẫn nằm trong khoảng từ 0 đến 1, nghĩa là các photon trong các mode đều có tính phản kết chùm. Điều này cho thấy vai trò của việc thêm photon vào các mode của trường PCS sẽ làm tăng tính chất phản kết chùm của GPAPCS.

2.2.5. Định lượng độ rối theo thời gian

Trong mục này, chúng tôi tiếp tục khảo sát các tính chất rối động của hệ gồm nguyên tử hai mức hiệu dụng và trường GPAPCS, và hệ gồm một mode của trường với hệ con gồm nguyên tử và mode còn lại của trường GPAPCS. Tiêu chuẩn entropy tuyến tính phụ thuộc thời gian được xác định trong biểu thức (1.68) được sử dụng để tính toán độ rối của các hệ này.

2.2.5.1. Định lượng độ rối theo thời gian của hệ nguyên tử-trường

Để khảo sát độ rối theo thời gian của hệ nguyên tử-trường, xét nguyên tử ban đầu ở trạng thái kích thích, áp dụng $\hat{\rho}(t)$ ở biểu thức (2.9) để tính entropy tuyến tính của nguyên tử theo thời gian $L_A(t)$. Trước tiên, thực hiện việc lấy vết $\hat{\rho}(t)$ trong biểu thức (2.9) theo hai mode của trường GPAPCS, kết quả thu được toán tử mật độ nguyên tử rút gọn như sau:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_A(t) &= \text{Tr}_F [\hat{\rho}(t)] \\ &= \mathcal{C}_{q;m,k}^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{R}_n|^2 \left[|U_{ee}(n,t)|^2 |e\rangle \langle e| + |U_{eg}(n,t)|^2 |g\rangle \langle g| \right] \\ &+ \mathcal{C}_{q;m,k}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathcal{R}_n \mathcal{R}_{n-1}^* U_{ee}(n,t) U_{eg}^*(n-1,t) |e\rangle \langle g| \right. \\ &\left. + \mathcal{R}_{n-1} \mathcal{R}_n^* U_{eg}(n-1,t) U_{ee}^*(n,t) |g\rangle \langle e| \right],\end{aligned}\quad (2.23)$$

trong đó $\mathcal{C}_{q;m,k}$ và $\mathcal{R}_n$ được xác định trong các biểu thức (1.22), (1.23), và các yếu tố ma trận theo thời gian của toán tử Unitary $U_{ij}(n,t)$ với $i, j = \{e, g\}$ được xác định trong biểu thức (2.7). Áp dụng biểu thức (2.23) vào biểu thức (1.68), kết quả tường minh của entropy tuyến tính của nguyên tử theo thời gian có dạng

$$\begin{aligned}L_A(t) &= 1 - \text{Tr}[\hat{\rho}_A^2(t)] \\ &= 1 - \mathcal{C}_{q;m,k}^4 \sum_{n,n'=0}^{\infty} \left\{ |\mathcal{R}_n|^2 |\mathcal{R}_{n'}|^2 \left[\cos^2(\lambda t \beta_n) \cos^2(\lambda t \beta_{n'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin^2(\lambda t \beta_n) \sin^2(\lambda t \beta_{n'}) \right] \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{R}_{n+1} \mathcal{R}_n^* \mathcal{R}_{n'} \mathcal{R}_{n'+1}^* + \mathcal{R}_n \mathcal{R}_{n+1}^* \mathcal{R}_{n'+1} \mathcal{R}_{n'}^*) \right. \\ &\quad \left. \times \sin(\lambda t \beta_n) \sin(\lambda t \beta_{n'}) \cos(\lambda t \beta_{n+1}) \cos(\lambda t \beta_{n'+1}) \right\},\end{aligned}\quad (2.24)$$

trong đó $\mathcal{C}_{q;m,k}$ và $\mathcal{R}_n$ được xác định trong các biểu thức (1.22) và (1.23). Tương tự, chúng tôi cũng thực hiện việc lấy vết $\hat{\rho}(t)$ theo nguyên tử để thu được toán tử mật độ trường rút gọn $\hat{\rho}_F(t)$ và entropy tuyến tính của

trường theo thời gian $L_F(t)$. Kết quả entropy tuyến tính của trường theo thời gian hoàn toàn trùng khớp với entropy tuyến tính của nguyên tử theo thời gian. Do đó, dưới đây chúng tôi chỉ khảo sát entropy tuyến tính của nguyên tử $L_A(t)$ theo thời gian. $L_A(t)$ mô tả độ rối của hệ nguyên tử và hai mode của trường GPAPCS theo thời gian.

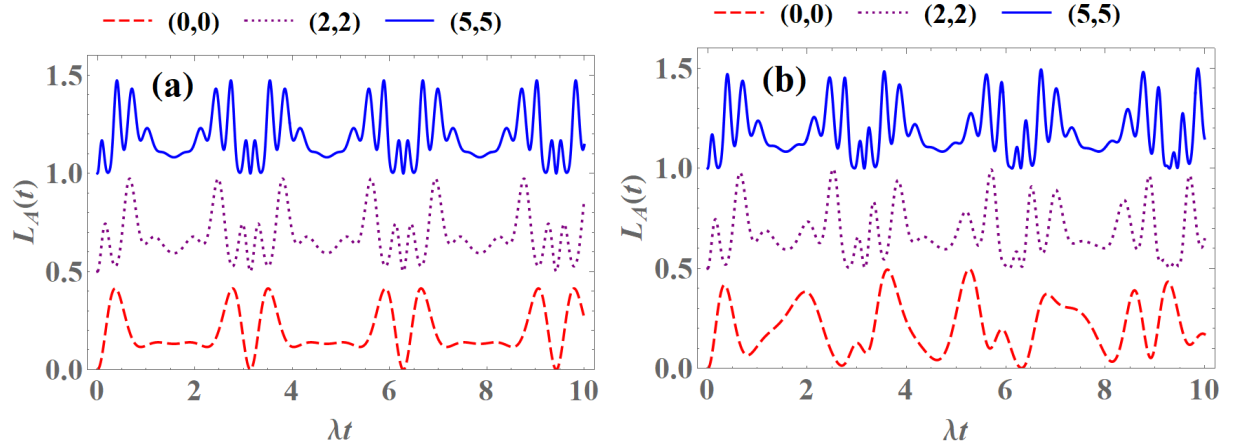
2.2.5.2. Định lượng độ rối theo thời gian của hệ con và một mode của trường GPAPCS

Để khảo sát độ rối giữa mode b của GPAPCS và hệ con gồm nguyên tử và mode a của GPAPCS, đầu tiên thực hiện việc lấy vết $\hat{\rho}(t)$ trong biểu thức (2.9) theo mode b của trường để thu được entropy tuyến tính của hệ con như sau:

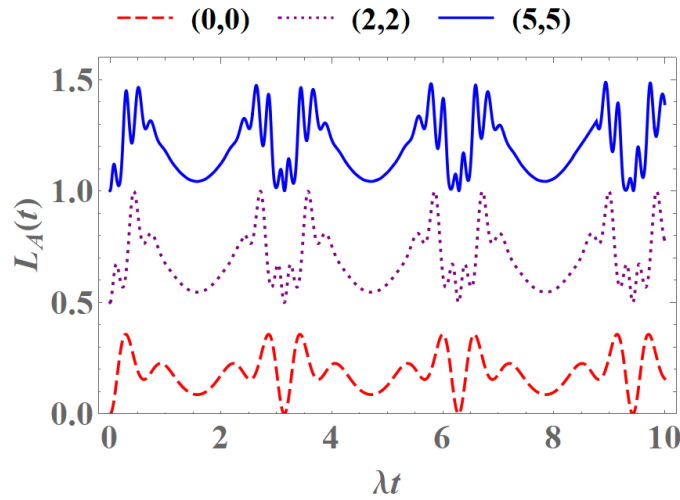
$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{sub}(t) &= \text{Tr}_b [\hat{\rho}(t)] = \sum_{s=0}^{\infty} \langle s+k | \hat{\rho}(t) | s+k \rangle \\
&= \mathcal{C}_{q;m,k}^2 \sum_n |\mathcal{R}_n|^2 \{ \cos^2(2\lambda t \beta_n) |e, n+q+m\rangle \langle n+q+m, e| \\
&\quad + \sin^2(2\lambda t \beta_n) |g, n+q+m+1\rangle \langle n+q+m+1, g| \} \\
&\quad + \mathcal{C}_{q;m,k}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n \mathcal{R}_{n-1}^* 2 \sin(\omega t) \cos(\lambda t \beta_n) \sin(\lambda t \beta_{n-1}) \\
&\quad \times (|e, n+q+m\rangle \langle n+q+m, g| \\
&\quad + |g, n+q+m\rangle \langle n+q+m, e|). \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Thay biểu thức (2.25) vào biểu thức (1.68), biểu thức tường minh của entropy tuyến tính của hệ con theo thời gian có dạng

$$\begin{aligned}
L_{sub}(t) &= 1 - \text{Tr}[\hat{\rho}_{sub}^2(t)] \\
&= 1 - \mathcal{C}_{q;m,k}^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ |\mathcal{R}_n|^4 [\cos^4(\lambda t \beta_n) + \sin^4(\lambda t \beta_n)] \right. \\
&\quad \left. + 2 |\mathcal{R}_n|^2 |\mathcal{R}_{n+1}|^2 \sin^2(\lambda t \beta_n) \cos^2(\lambda t \beta_{n+1}) \right\}. \tag{2.26}
\end{aligned}$$



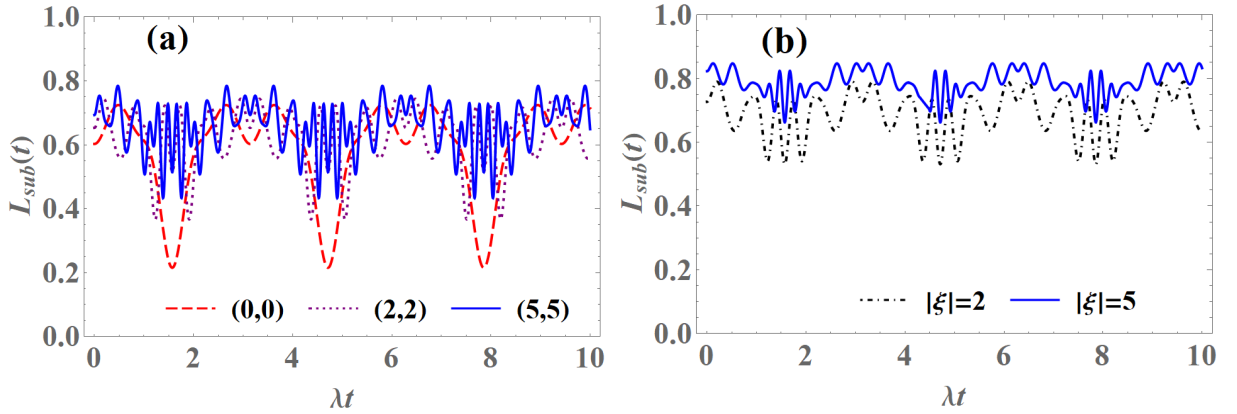
Hình 2.6: Sự phụ thuộc của $L_A(t)$ theo λt với $|\xi| = 2$ trong hai trường hợp (a) $q = 0$ và (b) $q = 2$. Đường đứt nét màu đỏ là $L_A(t)$ và $(m, k) = (0, 0)$. Đường chấm chấm màu tím là $L_A(t) + 0.5$ và $(m, k) = (2, 2)$. Đường liền nét màu xanh là $L_A(t) + 1.0$ và $(m, k) = (5, 5)$.



Hình 2.7: Sự phụ thuộc của $L_A(t)$ theo λt . Đường đứt nét màu đỏ là $L_A(t)$ ứng với $(m, k) = (0, 0)$, $q = 0$, $|\xi| = 3$. Đường chấm chấm màu tím là $L_A(t) + 0.5$ ứng với $(m, k) = (2, 2)$, $q = 0$, $|\xi| = 5$. Đường liền nét màu xanh là $L_A(t) + 1.0$ ứng với $(m, k) = (5, 5)$, $q = 2$, $|\xi| = 5$.

Các hình 2.6 và hình 2.7 mô tả độ rối giữa nguyên tử và trường trong trường hợp nguyên tử ban đầu ở trạng thái kích thích. Khi trường ở PCS, chúng tôi quan sát thấy độ rối nguyên tử-trường đạt giá trị xấp xỉ 0.4. Trường hợp $q = 0$, các dao động của $L_A(t)$ là tuần hoàn và có tính chất đối xứng, điều này sẽ biến mất khi $q \neq 0$ (các đường đứt nét màu đỏ). Khi

thêm photon vào hai mode của trường GPAPCS (các đường chấm chấm màu tím và đường liền nét màu xanh), giá trị của $L_A(t)$ tăng lên và đạt giá trị xấp xỉ 0.5, nghĩa là nguyên tử và trường càng rời với nhau. Ngoài ra, khoảng thời gian rời giữa nguyên tử và trường trong mỗi chu kì cũng tăng lên khi các photon càng được thêm vào hai mode của trường. Đồng thời, giá trị của $|\xi|$ càng lớn thì độ rời nguyên tử-trường càng tăng (hình 2.7). Trường hợp $q \neq 0$, độ rời $L_A(t)$ không còn đối xứng trong mỗi chu kì. Do tham số q là sự chênh lệch số photon giữa hai mode của trường, và các quá trình đang xét đều là các quá trình tương quan hai photon, nên khi $q \neq 0$ và $m \neq k$ thì sự dao động mất đi tính đối xứng theo thời gian. Khi lựa chọn điều kiện sao cho các tham số m và k bằng nhau và $q = 0$, các hiệu ứng trong tương tác nguyên tử-trường càng rõ nét [82].



Hình 2.8: Sự phụ thuộc của $L_{sub}(t)$ theo λt với $q = 0$. Hình (a) $|\xi| = 1$, $(m, k) = (0, 0)$ (đường đứt nét màu đỏ), $(2, 2)$ (đường chấm chấm màu tím), $(5, 5)$ (đường liền nét màu xanh). Hình (b) $(m, k) = (1, 1)$ với $|\xi| = 2$ (đường nét gạch chấm màu đen) và $|\xi| = 5$ (đường liền nét màu xanh).

Hình 2.8 mô tả độ rời theo thời gian giữa hệ con gồm nguyên tử và mode a của trường GPAPCS với mode b còn lại. Trong trường hợp này, chúng tôi thấy rằng độ rời $L_{sub}(t)$ luôn cao hơn độ rời giữa nguyên tử-trường $L_A(t)$. Hình 2.8(a) chỉ ra sự phụ thuộc của $L_{sub}(t)$ theo thời gian trong cả hai trường hợp trường ở PCS và GPAPCS với tham số cố định

$|\xi| = 1$. Giá trị của $L_{sub}(t)$ khi trường ở PCS đạt xấp xỉ 0.7 (đường đứt nét màu đỏ), và khi thêm photon vào hai mode của trường GPAPCS, giá trị của $L_{sub}(t)$ lớn hơn và nhận giá trị cực đại xấp xỉ 0.8. Hình 2.8(b) chỉ ra ảnh hưởng của $|\xi|$ lên $L_{sub}(t)$, giá trị $|\xi|$ càng lớn thì giá trị của $L_{sub}(t)$ càng tăng. Như vậy, các tham số cường độ trường ban đầu và số photon được thêm vào hai mode của trường đều ảnh hưởng đến độ rối giữa một mode của trường GPAPCS và hệ con. Khi cường độ trường càng lớn và số photon được thêm vào hai mode của trường càng tăng thì độ rối giữa một mode của trường GPAPCS và hệ con theo thời gian càng tăng.

2.3. Các tính chất và các quá trình động học của trường ở trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon

2.3.1. Hamiltonian toàn phần của hệ nguyên tử-trường trong mô hình Jaynes-Cummings hai mode

Mô hình JC hai mode được khảo sát trong mục này gồm một nguyên tử hai mức hiệu dụng tương tác với trường ở trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon (PATCS). Nguyên tử có hai mức cơ bản và kích thích được kí hiệu bởi hai vectơ $|g\rangle$, $|e\rangle$ ứng với các mức năng lượng ω_g và ω_e . Giữa hai mức $|g\rangle$ và $|e\rangle$, nguyên tử có một mức trung gian $|i\rangle$ có năng lượng ω_i và năng lượng của ba mức ω_g , ω_e và ω_i là khác nhau.

Trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon ứng với ba mode $j = \{1, 2, 3\}$ có các mức năng lượng ω_j khác nhau thỏa mãn điều kiện $\omega_i - \omega_g = \omega_1 - \delta$, $\omega_e - \omega_i = \omega_2 + \delta$, trong đó δ là độ điều hưởng cho quá trình hấp thụ một photon. Khi nguyên tử chuyển mức năng lượng giữa hai mức $|g\rangle$ và $|e\rangle$ thì hấp thụ (phát xạ) cùng lúc hai photon mode a và mode b . Với một cấu hình như vậy, thì các dịch chuyển một photon giữa $|g\rangle$ và $|i\rangle$, giữa $|i\rangle$ và $|e\rangle$

mặc dù là được phép nhưng không khả thi vì vi phạm sự bảo toàn năng lượng. Tuy nhiên dịch chuyển giữa $|g\rangle$ và $|e\rangle$ mặc dù bị cấm, nhưng có thể bằng các quá trình hai photon. Nghĩa là bằng cách hấp thụ đồng thời một photon từ mode a và một photon khác từ mode b thì nguyên tử nhảy từ mức $|g\rangle$ lên mức $|e\rangle$. Tương tự, nó nhảy từ mức $|e\rangle$ xuống mức $|g\rangle$ bằng cách phát xạ hai photon cùng lúc.

Áp dụng biểu thức (1.48), Hamiltonian toàn phần mô tả mô hình JC hai mode của hệ nguyên tử-trường trong phép gần đúng sóng quay và bỏ qua hiệu ứng Stark có dạng

$$\begin{aligned}\hat{H} = \sum_{j=1}^2 \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{\omega}{2} (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) \\ + \lambda (|e\rangle \langle g| \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |g\rangle \langle e|),\end{aligned}\quad (2.27)$$

trong đó $\omega = \omega_e - \omega_g$, các toán tử $\hat{a}_j$ và $\hat{a}_j^\dagger$ là các toán tử hủy và sinh photon mode j , và λ là hằng số tương tác giữa nguyên tử và trường. Chọn hệ hai vectơ cơ sở trong biểu diễn trạng thái mặc áo là $|e, n_a + h, n_b + k, n_c + l\rangle$ và $|g, n_a + h + 1, n_b + k + 1, n_c + l\rangle$. Hàm riêng và trị riêng tương ứng của toán tử $\hat{H}$ trong biểu diễn trạng thái mặc áo được xác định cụ thể như sau:

$$\begin{aligned}|\Psi_n^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e, n_a + h, n_b + k, n_c + l\rangle \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |g, n_a + h + 1, n_b + k + 1, n_c + l\rangle,\end{aligned}\quad (2.28)$$

$$\varepsilon_n^\pm = A_n \pm Q_n,\quad (2.29)$$

trong đó các hệ số có dạng

$$A_n = \omega_1 (n_a + h) + \omega_2 (n_b + k) + \frac{1}{2}\omega,\quad (2.30)$$

và

$$Q_n = \lambda \sqrt{(n_a + h + 1)(n_b + k + 1)}.\quad (2.31)$$

2.3.2. Toán tử mật độ theo thời gian

Để mô tả sự tiến triển của hệ nguyên tử-trường theo thời gian, chúng tôi sử dụng toán tử ma trận mật độ của hệ được định nghĩa như sau:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(n, t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(n, t), \quad (2.32)$$

trong đó $\hat{U}(n, t) = e^{-i\hat{H}t}$ là toán tử Unità tiến hóa theo thời gian và $\hat{\rho}(0)$ là toán tử mật độ của hệ tại thời điểm ban đầu. Nếu xem nguyên tử ban đầu ở trạng thái tổ hợp $|A\rangle = \mu_e |e\rangle + \mu_g |g\rangle$, trong đó $|\mu_e|^2 + |\mu_g|^2 = 1$, và trường $|F\rangle$ ở trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon được xác định trong biểu thức (1.32), thì toán tử ma trận mật độ của hệ tại thời điểm ban đầu $\hat{\rho}(0)$ được kết hợp từ hai thành phần của nguyên tử và trường có dạng

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_F(0) = |A\rangle \langle A| \otimes |F\rangle \langle F| = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{ee}(0) & \hat{\rho}_{eg}(0) \\ \hat{\rho}_{ge}(0) & \hat{\rho}_{gg}(0) \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

trong đó, các yếu tố ma trận tại thời điểm ban đầu $\hat{\rho}_{js}(0)$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{js}(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_j \mu_s^* \mathcal{C}_{n;h,k,l} \mathcal{C}_{m;h,k,l}^* \\ &\times |j, n_a + h, n_b + k, n_c + l\rangle \langle m_c + l, m_b + k, m_c + h, s|, \end{aligned} \quad (2.34)$$

với $j, s = \{e, g\}, j \neq s$.

Áp dụng Hamiltonian $\hat{H}$ trong biểu thức (2.27), chúng tôi thu được dạng của toán tử Unità tiến hóa theo thời gian

$$\hat{U}(n, t) = e^{-i\hat{H}t} = \begin{pmatrix} U_{ee}(n, t) & U_{eg}(n, t) \\ U_{ge}(n, t) & U_{gg}(n, t) \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

trong đó các yếu tố ma trận được xác định như sau:

$$\begin{aligned} U_{ee}(n, t) &= U_{gg}(n, t) = \frac{1}{2} \left(e^{-i\varepsilon_n^+ t} + e^{-i\varepsilon_n^- t} \right), \\ U_{eg}(n, t) &= U_{ge}(n, t) = \frac{1}{2} \left(e^{-i\varepsilon_n^+ t} - e^{-i\varepsilon_n^- t} \right), \end{aligned} \quad (2.36)$$

với $\varepsilon_n^\pm$ được cho trong biểu thức (2.29).

Biểu thức tường minh của toán tử ma trận mật độ của hệ theo thời gian $\hat{\rho}(t)$ thu được khi thay các biểu thức từ (2.33) đến (2.36) vào biểu thức (2.32). Đồng thời, để đưa ra biểu thức giải tích mô tả các tính chất động lượng tử của nguyên tử và trường trong mô hình JC, chúng tôi sử dụng toán tử mật độ nguyên tử rút gọn $\hat{\rho}_A(t)$ và toán tử mật độ trường rút gọn $\hat{\rho}_F(t)$ bằng cách lấy vết của $\hat{\rho}(t)$ theo các trạng thái của trường và theo các trạng thái nguyên tử một cách tương ứng với các yếu tố ma trận được xác định bởi

$$\rho_A^{js}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle j, n_{a,b,c;h,k,l} | \hat{\rho}(t) | s, n_{a,b,c;h,k,l} \rangle \quad (2.37)$$

$$\rho_F^{nm}(t) = \sum_{j=\{e,g\}}^{\infty} \langle j, n_{a,b,c;h,k,l} | \hat{\rho}(t) | j, m_{a,b,c;h,k,l} \rangle, \quad (2.38)$$

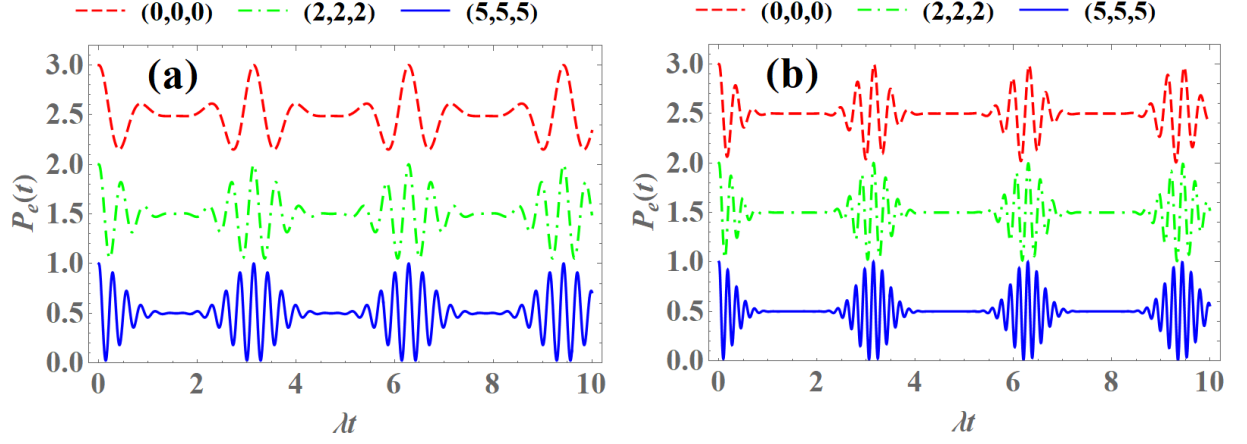
trong đó $|n_{a,b,c;h,k,l}\rangle = |n_a + h, n_b + k, n_c + l\rangle$.

2.3.3. Các tính chất động học của nguyên tử theo thời gian

Các tính chất động học của nguyên tử theo thời gian được mô tả thông qua xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích $P_e(t)$, đó chính là các yếu tố ma trận trên đường chéo của toán tử mật độ nguyên tử rút gọn $\hat{\rho}_A(t)$. Thay các biểu thức (2.32) vào biểu thức (2.37), kết quả thu được như sau:

$$\begin{aligned} P_e(t) &= \rho_A^{ee}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e, n_{a,b,c;h,k,l} | \hat{\rho}(t) | n_{a,b,c;h,k,l}, e \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) \cos^2(Q_n t), \end{aligned} \quad (2.39)$$

trong đó $P_{n;h,k,l}(0)$ và Q_n được cho trong biểu thức (1.34) và (2.31). Kết quả giải tích ở biểu thức (2.39) chỉ ra khi các tham số được chọn thỏa



Hình 2.9: Sự phụ thuộc của $P_e(t)$ theo λt với các tham số (a) $p = q = 0$, $r = 5$, (b) $p = q = 2$, $r = 20$ và bộ (h, k, l) tương ứng với đường nét gạch đỏ $[P_e(t) + 2]$ là $(0, 0, 0)$, đường nét gạch chấm màu xanh lá $[P_e(t) + 1]$ là $(2, 2, 2)$, đường liền nét màu xanh đậm $P_e(t)$ là $(5, 5, 5)$.

mãn điều kiện $p = q = 0$ và $h = k = l$ thì $P_e(t)$ dao động với tần số $\lambda(n + h + 1)/\pi$, cũng chính là dao động Rabi của nguyên tử. Do đó trong các hình vẽ bên dưới chúng tôi thường chọn các tham số ứng với $h = k = l$ khi khảo sát hai trường hợp $p = q = 0$ và $p = q \neq 0$ cho trường ở TCS và PATCS.

Hình 2.9 là đồ thị hàm $P_e(t)$ phụ thuộc theo thời gian, đường nét gạch đỏ dành cho trường ở TCS ứng với $(h, k, l) = (0, 0, 0)$, hai đường còn lại dành cho trường ở PATCS trong đó đường nét gạch chấm màu xanh lá $(h, k, l) = (2, 2, 2)$, đường liền nét màu xanh đậm $(h, k, l) = (5, 5, 5)$. Hình 2.9(a) khảo sát cho trường hợp $p = q = 0$, $r = 5$ và hình 2.9(b) cho trường hợp $p = q = 2$, $r = 20$. Đồ thị hình 2.9 chỉ ra trong cả hai trường hợp TCS và PATCS sự hồi phục diễn ra đều đặn theo chu kỳ, hay $P_e(t)$ dao động với cùng chu kỳ hồi phục và có giá trị trong khoảng từ 0 đến 1. Tuy nhiên bề rộng của khoảng hồi phục trong trường hợp PATCS lớn hơn TCS do bản chất của phân bố sub - Poisson. Ngoài ra, khi tăng r số dao động trong mỗi chu kỳ đều tăng lên (hình 2.9b). Bên cạnh đó, khi số photon

thêm vào ba mode của trường tăng lên thì số dao động trong mỗi chu kì hồi phục cũng tăng lên nhanh. Khi $p = q = 0$ (hình 2.9a), sự dao động trong mỗi chu kì có tính chất đối xứng, tuy nhiên điều này không còn đúng khi $p = q \neq 0$ (hình 2.9b, đường nét gạch đỏ). Khi số photon thêm vào ba mode của trường ở PATCS càng tăng thì sự đối xứng trong mỗi chu kì hồi phục được cải thiện rõ rệt. Điều này cho thấy xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích $P_e(t)$ không chỉ phụ thuộc vào cường độ trường ban đầu qua tham số r , mà còn phụ thuộc vào số photon được thêm vào các mode của trường ở PATCS.

2.3.4. Các tính chất động lượng tử của trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon

Các tính chất động lượng tử của trường ở PATCS được khảo sát thông qua các hàm phân bố photon theo thời gian $P_n(t)$, hàm tương quan bậc hai cùng mode $g_{ii}^{(2)}(t)$ và hàm tương quan bậc hai khác mode $g_{12}^{(2)}(t)$ theo thời gian. Để đơn giản trong quá trình tính số và thảo luận, chúng tôi xét nguyên tử ban đầu ở trạng thái kích thích. Áp dụng các biểu thức từ (2.33) đến (2.36) vào biểu thức (2.38), chúng tôi thu được các kết quả cho các yếu tố ma trận trên đường chéo chính của toán tử mật độ rút gọn của trường cụ thể như sau:

$$\begin{aligned}
P_n(t) &= \rho_F^{nn}(t) \\
&= \langle e, n_{a,b,c;h,k,l} | \hat{\rho}(t) | e, n_{a,b,c;h,k,l} \rangle + \langle g, n_{a,b,c;h,k,l} | \hat{\rho}(t) | g, n_{a,b,c;h,k,l} \rangle \\
&= P_{n;h,k,l}(0) \cos^2(Q_n t) + P_{n-1;h,k,l}(0) \sin^2(Q_{n-1} t), \tag{2.40}
\end{aligned}$$

trong đó $P_{n;h,k,l}(0)$ và $Q_n(t)$ được cho ở các biểu thức (1.34) và biểu thức (2.31).

Hàm tương quan bậc hai cùng mode phụ thuộc thời gian có dạng

$$g_{ii}^{(2)}(t) = \frac{\langle \hat{a}_i^{+2}(t) \hat{a}_i^2(t) \rangle - \langle \hat{a}_i^+(t) \hat{a}_i(t) \rangle^2}{\langle \hat{a}_i^+(t) \hat{a}_i(t) \rangle^2} = \frac{\langle \hat{n}_i^2(t) \rangle - \langle \hat{n}_i(t) \rangle^2}{\langle \hat{n}_i(t) \rangle^2} - 1, \quad (2.41)$$

trong đó chỉ số $i = \{1, 2\}$ tương ứng với mode a và mode b của trường PATCS, và $\hat{n}_i(t) = \hat{a}_i^+(t) \hat{a}_i(t)$ là toán tử số photon theo thời gian của mode i . Hàm $g_{ii}^{(2)}(t)$ theo thời gian cho biết tính chất của photon mode i . Khi phương sai của toán tử số photon bé hơn trị trung bình của nó thì $g_{ii}^{(2)}(t)$ nhận giá trị âm, chúng ta nói rằng photon có tính chất phản kết chùm và ngược lại. Tính chất phản kết chùm của photon là điều đáng mong đợi trong các hệ lượng tử do ứng dụng tạo ra các nguồn đơn photon của chúng [83].

Trong biểu thức (2.41), thay các chỉ số i bằng các chỉ số $\{1, 2\}$, ta có hàm tương quan bậc hai khác mode theo thời gian $g_{12}^{(2)}(t)$ có dạng

$$g_{12}^{(2)}(t) = \frac{\langle \hat{n}_1(t) \hat{n}_2(t) \rangle - \langle \hat{n}_1(t) \rangle \langle \hat{n}_2(t) \rangle}{\langle \hat{n}_1(t) \rangle \langle \hat{n}_2(t) \rangle}. \quad (2.42)$$

Nếu $g_{12}^{(2)}(t)$ là đại lượng dương thì các photon mode a và mode b tương quan với nhau, trong khi nếu $g_{12}^{(2)}(t)$ là âm thì các photon mode a và mode b không tương quan với nhau. Áp dụng biểu thức (2.19) để tính trị trung bình của một toán tử theo thời gian. Thay biểu thức (2.32) vào biểu thức (2.19), chúng tôi thu được các kết quả trị trung bình và trị trung bình bình phương của toán tử số photon mode i theo thời gian như sau:

$$\langle \hat{n}_i(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) n_i + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) \sin^2(Q_n t), \quad (2.43)$$

$$\langle \hat{n}_i^2(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) (2n_i + 1) \sin^2(Q_n t) + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) n_i^2, \quad (2.44)$$

$$\langle \hat{n}_1(t) \hat{n}_2(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) (n_1 + n_2 + 1) \sin^2(Q_n t)$$

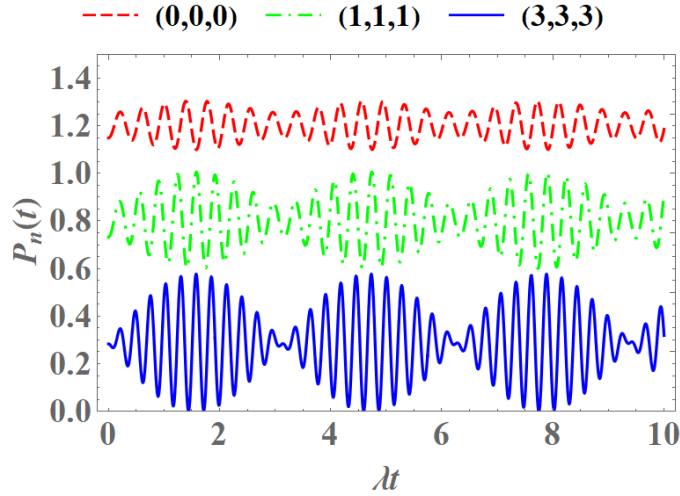
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) n_1 n_2. \quad (2.45)$$

Thay các biểu thức (2.43), (2.44) và (2.45) vào các biểu thức (2.41) và (2.42), kết quả thu được hàm tương quan bậc hai cùng mode theo thời gian

$$g_{ii}^{(2)}(t) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) 2n_i \sin^2(Q_n t) + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) (n_i^2 - n_i)}{\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) n_i + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) \sin^2(Q_n t) \right]^2} - 1, \quad (2.46)$$

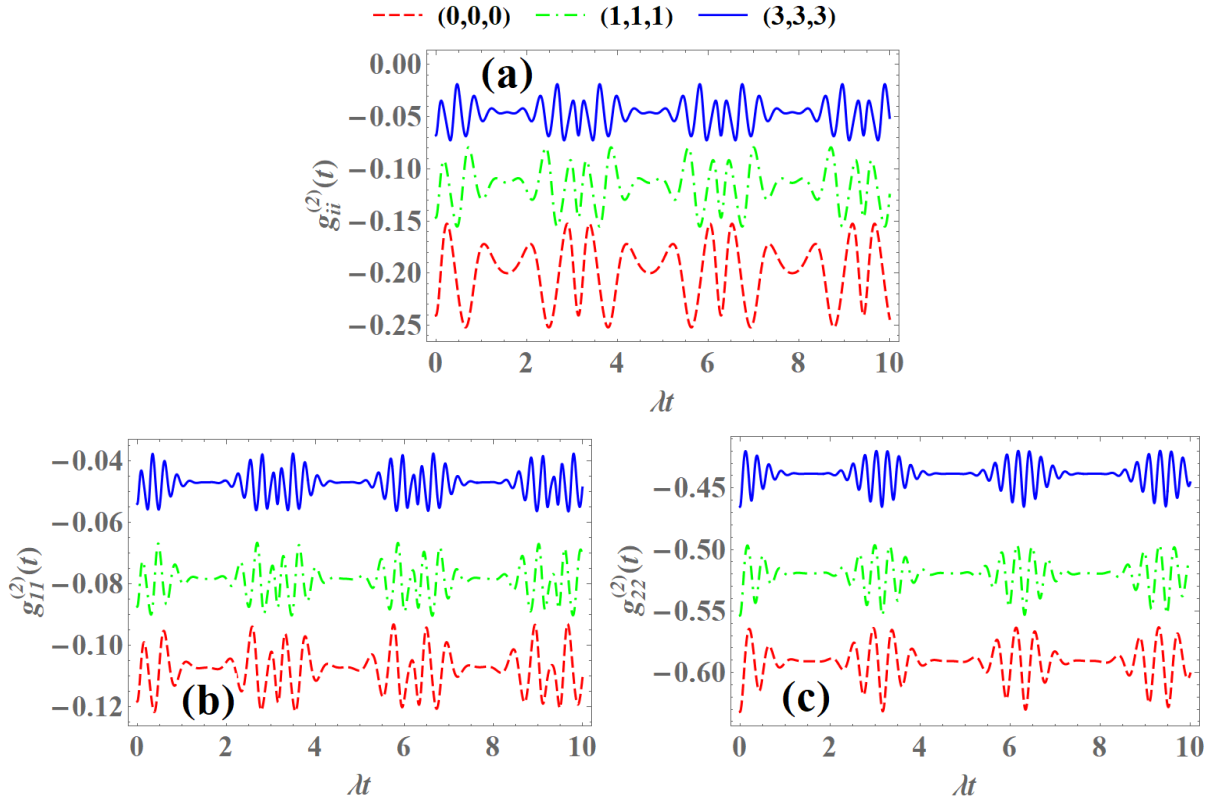
và hàm tương quan bậc hai khác mode theo thời gian

$$g_{12}^{(2)}(t) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) (n_1 + n_2 + 1) \sin^2(Q_n t) + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) n_1 n_2}{\sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) (n_1 + n_2) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;h,k,l}(0) \sin^2(Q_n t)} - 1. \quad (2.47)$$



Hình 2.10: Sự phụ thuộc của $P_n(t)$ theo λt với các tham số $n = 5$, $r = 10$, $p = q = 2$ và bộ (h, k, l) tương ứng với đường nét gạch đỏ $[P_n(t) + 1.1]$ là $(0, 0, 0)$, đường nét gạch chấm màu xanh lá $[P_n(t) + 0.6]$ là $(1, 1, 1)$, đường liền nét màu xanh đậm $P_n(t)$ là $(3, 3, 3)$.

Hình 2.10 là đồ thị sự phụ thuộc của $P_n(t)$ theo λt với các tham số $n = 5$, $r = 10$, $p = q = 2$. Khi trường ở TCS, hàm phân bố photon theo thời gian $P_n(t)$ có biên độ dao động xấp xỉ 0.2, trong khi ở PATCS biên độ



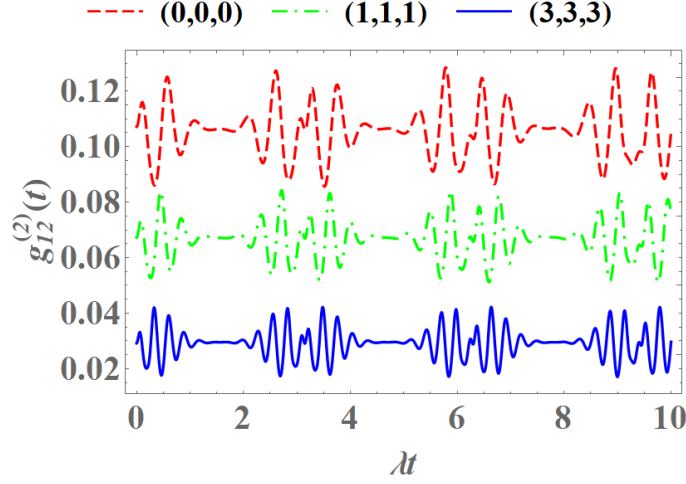
Hình 2.11: Sự phụ thuộc của $g_{ii}^{(2)}(t)$ theo λt trong các trường hợp (a) $r = 5, p = q = 0$, (b) và (c) $r = 10, p = q = 2$. Bộ (h, k, l) ứng với đường nét gạch đỏ $g_{ii}^{(2)}(t)$ là $(0, 0, 0)$, đường nét gạch chấm màu xanh lá $g_{ii}^{(2)}(t) + 0.02$ là $(1, 1, 1)$, đường liền nét màu xanh đậm $g_{ii}^{(2)}(t) + 0.04$ là $(3, 3, 3)$.

dao động này xấp xỉ 0.4 và 0.6 tương ứng với số photon được thêm vào ba mode của trường là $(1, 1, 1)$ và $(3, 3, 3)$. Bên cạnh đó, đồ thị hình 2.10 còn cho thấy khi trường ở TCS các chu kỳ dao động của $P_n(t)$ không rõ ràng, chu kỳ sau chồng phủ với chu kỳ trước. Tuy nhiên, khi thêm photon vào các mode của trường ở PATCS, chúng ta thấy rõ sự dao động tuần hoàn của $P_n(t)$ theo thời gian với sự tách biệt rõ ràng trong mỗi chu kỳ, đồng thời giá trị cực đại của $P_n(t)$ cũng tăng lên theo sự tăng số photon vào ba mode của trường.

Hình 2.11 mô tả sự phụ thuộc của hàm tương quan bậc hai cùng mode $g_{ii}^{(2)}(t)$ theo thời gian, nó cho biết tính chất của các photon mode i theo thời gian, với $i = \{1, 2\}$ tương ứng với các mode a và b của trường PATCS.

Trong đó, hình 2.11(a) được vẽ cho trường hợp $p = q = 0$, nghĩa là số photon trong ba mode của trường ở TCS và PATCS là như nhau, nên $g_{ii}^{(2)}(t) = g_{11}^{(2)}(t) = g_{22}^{(2)}(t)$. Hình 2.11(b) và hình 2.11(c) được vẽ cho trường hợp $p = q \neq 0$ nghĩa là số photon ở các mode là khác nhau, trong đó hình 2.11(b) mô tả tính chất các photon trong mode a và hình 2.11(c) mô tả tính chất các photon trong mode b của PATCS. Các đồ thị cho thấy hàm tương quan bậc hai cùng mode theo thời gian $g_{ii}^{(2)}(t)$ luôn âm trong mọi trường hợp khi trường ở TCS hay PATCS, nghĩa là các photon trong hai mode a và b đều có tính phản kết chùm. Tuy nhiên, khi thêm photon vào các mode của trường (đường nét gạch chấm màu xanh lá và đường liền nét màu xanh đậm) thì giá trị của hàm $g_{ii}^{(2)}(t)$ có tăng lên và chu kỳ dao động của nó càng rõ ràng hơn. Bên cạnh đó, việc tăng cường độ trường ban đầu thông qua tham số r cũng làm cho chu kỳ dao động của $g_{ii}^{(2)}(t)$ rõ ràng hơn và số dao động trong mỗi chu kỳ cũng tăng lên. Ngoài ra trong hình 2.11(c), khi số photon các mode là khác nhau thì giá trị của hàm $g_{22}^{(2)}(t)$ bé hơn rất nhiều so với $g_{11}^{(2)}(t)$. Điều này càng chứng tỏ số photon được thêm vào ba mode của trường PATCS và cường độ trường ban đầu có ảnh hưởng lớn đến tính chất phản kết chùm của photon các mode trong quá trình chúng tương tác với nguyên tử trong mô hình JC hai mode [84].

Hình 2.12 mô tả mối tương quan giữa hai mode a, b qua đồ thị hàm tương quan bậc hai khác mode $g_{12}^{(2)}(t)$ theo thời gian. Đồ thị cho thấy trong cả hai trường hợp khi trường ở TCS hay PATCS thì các photon ở hai mode a và b của trường đều tương quan với nhau vì hàm $g_{12}^{(2)}(t)$ luôn dương. Khi càng thêm số photon vào ba mode của trường thì giá trị cực đại của $g_{12}^{(2)}(t)$ có giảm nhẹ, nhưng số dao động trong mỗi chu kỳ tăng lên, sự dao động là tuần hoàn, đều đặn và có sự phân biệt rõ ràng giữa các chu kỳ.



Hình 2.12: Sự phụ thuộc của $g_{12}^{(2)}(t)$ theo λt với các tham số $r = 10$, $p = q = 2$, và bộ (h, k, l) ứng với đường nét gạch đỏ $g_{12}^{(2)}(t) + 0.06$ là $(0, 0, 0)$, đường nét gạch chấm màu xanh lá $g_{12}^{(2)}(t) + 0.03$ là $(1, 1, 1)$, đường liền nét màu xanh đậm $g_{12}^{(2)}(t)$ là $(3, 3, 3)$.

2.4. Kết luận

Chúng tôi đã nghiên cứu các tính chất và các quá trình động học của nguyên tử và trường trong mô hình Jaynes-Cumming bằng phương pháp toán tử mật độ theo thời gian và toán tử Unita với các kết luận cụ thể sau:

Thứ nhất, trong cả hai trường hợp khảo sát là trường ở trạng thái kết hợp cặp thêm photon tổng quát và trường ở trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon, các tính chất động học của nguyên tử đều tuần hoàn theo thời gian thể hiện sự dao động Rabi của nguyên tử trong quá trình tương tác với các trường phi cổ điển. Các quá trình động lượng tử của trường GPAPCS và PATCS cũng có sự dao động tuần hoàn theo thời gian và thể hiện các tính chất phản kết chùm của photon trong các mode của trường. Nguyên tử và trường trong mô hình JC hai mode thể hiện tính chất rối theo thời gian, đây là kết quả đáng mong đợi để sử dụng kênh lượng tử rối này vào thực hiện các nhiệm vụ lượng tử.

Thứ hai, các tính chất động học của nguyên tử và các quá trình động

lượng tử của trường đều bị ảnh hưởng bởi các tham số cường độ trường ban đầu và số photon được thêm vào các mode của các trường đa mode. Khảo sát cho thấy khi tăng cường độ trường ban đầu và càng thêm photon vào hai mode của trường với điều kiện số photon thêm vào các mode là như nhau thì các tính chất và các quá trình động đều thay đổi theo chiều hướng cải thiện hơn. Điều này càng thấy rõ trong việc định lượng độ rối theo thời gian giữa nguyên tử và trường. Nó là cơ sở quan trọng để chúng tôi sử dụng nguồn rối này trong chương 4 để thực hiện viễn tải lượng tử.

Thứ ba, các phương pháp được chúng tôi sử dụng trong chương này là phương pháp toán tử mật độ mà cho phép mô tả sự diễn biến của hệ nguyên tử-trường theo thời gian và toán tử Unita theo thời gian. Mô hình mà chúng tôi sử dụng là mô hình Jaynes-Cumming hai mode trong điều kiện lý tưởng, đó là không xét đến ảnh hưởng của hốc chứa nguyên tử. Vậy khi xét đến ảnh hưởng của môi trường đến tương tác có tác động đến các quá trình trên hay không sẽ được chúng tôi làm rõ trong chương 3.

Chương 3

CÁC TÍNH CHẤT VÀ CÁC QUÁ TRÌNH ĐỘNG HỌC CỦA TRƯỜNG HAI MODE MỚI TRONG MÔ HÌNH JAYNES-CUMMINGS

3.1. Mở đầu

Trên cơ sở phương pháp thêm photon định xứ và không định xứ vào các trạng thái gốc ban đầu đã được chúng tôi giới thiệu trong chương 1, và sự tăng cường các tính chất phi cổ điển cũng như các tính chất và các quá trình động lượng tử của các trường phi cổ điển khi được thêm photon định xứ vào, chúng tôi đề xuất một trạng thái phi cổ điển hai mode mới. Đầu tiên chúng tôi giới thiệu trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon (SPAPCS) bằng phương pháp thêm photon không định xứ vào trạng thái kết hợp cặp. Tiếp theo chúng tôi khảo sát các tính chất của trạng thái mới thông qua hàm Wigner và định lượng độ rối giữa các mode bằng tiêu chuẩn entropy tuyến tính không phụ thuộc thời gian. Trạng thái phi cổ điển hai mode mới được sử dụng vào mô hình JC để khảo sát độ rối giữa nguyên tử hai mức hiệu dụng với trường hai mode mới bằng tiêu chuẩn entropy tuyến tính phụ thuộc thời gian. Quá trình tương tác này có thể dẫn đến ảnh hưởng của môi trường thể hiện qua tham số suy giảm pha γ .

3.2. Trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon

3.2.1. Khái niệm

Dựa trên các kết quả về việc tăng cường tính chất phi cổ điển của các trạng thái phi cổ điển đa mode khi thêm photon vào các trạng thái gốc ban

đầu, như trạng thái kết hợp cặp thêm photon là việc thêm photon định xứ vào trạng thái kết hợp cặp, trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon và trạng thái kết hợp bộ ba chồng chất thêm photon là việc thêm photon định xứ và không định xứ vào trạng thái kết hợp bộ ba. Chúng ta biết rằng, PCS là trạng thái phi Gauss tự nhiên [80]. Gần đây việc thêm và bớt photon lên hai mode của PCS có thể làm tăng cường tính chất phi Gauss [28]. Do đó, chúng tôi đề xuất một trạng thái mới được gọi là trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon bằng việc thêm chồng chất các photon vào hai mode của PCS.

Gọi $\hat{a}^{+k}$ và $\hat{b}^{+l}$ là các toán tử sinh photon bậc k và bậc l , trong đó các chỉ số k và l là các số nguyên không âm. Để thu được trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon, chúng tôi thực hiện việc tác dụng liên tục tổng các toán tử $\hat{a}^{+k}$ và $\hat{b}^{+l}$ lên PCS như sau:

$$|\xi, q; k, l\rangle = \mathcal{N}_{kl} (\hat{a}^{+k} + \sigma \hat{b}^{+l}) |\xi, q\rangle, \quad (3.1)$$

trong đó σ là số thực có giá trị nằm trong khoảng từ -1 đến 1 , $\mathcal{N}_{kl}$ là hệ số chuẩn hóa và $|\xi, q\rangle$ là trạng thái kết hợp cặp được cho trong biểu thức (1.18).

Thay biểu thức (1.18) vào biểu thức (3.1), SPAPCS được viết lại trong không gian trạng thái Fock như sau:

$$\begin{aligned} |\xi, q; k, l\rangle = & \mathcal{N}_{q;kl} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\xi^n}{[n!(n+q)!]^{1/2}} \frac{\sqrt{(n+q+k)!}}{\sqrt{(n+q)!}} |n+q+k, n\rangle \right. \\ & \left. + \frac{\xi^n}{[n!(n+q)!]^{1/2}} \frac{\sigma \sqrt{(n+l)!}}{\sqrt{n!}} |n+q, n+l\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

trong đó hệ số chuẩn hóa $\mathcal{N}_{q;kl}$ có dạng (xem Phụ lục 1)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{q;kl} = & \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} \left(\frac{(n+q+k)!}{(n+q)!} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sigma^2 (n+l)!}{n!} + 2\sigma \delta_{k+l,0} \right) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Từ biểu thức (3.2), khi $k = l = 0$ thì SPAPCS $|\xi, q; k, l\rangle$ trở thành PCS $|\xi, q\rangle$ trong biểu thức (1.18). Để đơn giản hóa các kí hiệu, chúng tôi viết lại biểu thức (3.2) như sau:

$$|\xi, q; k, l\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \mathcal{C}_{i,n} |n + a_i, n + b_i\rangle, \quad (3.4)$$

trong đó các tham số $\mathcal{C}_{i,n}$ được cho bởi

$$\mathcal{C}_{i,n} = \mathcal{N}_{q;kl} \frac{\sigma^{l_i/l} \xi^n \sqrt{(n + a_i)!(n + b_i)!}}{(n + q)!n!}, \quad (3.5)$$

với $a_i = q + k_i$ và $b_i = l_i$, trong đó $k_1 = k$, $k_2 = 0$, $l_1 = 0$, $l_2 = l$.

3.2.2. Hàm Wigner

Hàm Wigner là một hàm phân bố trong không gian phức, biểu hiện tính phi Gauss của một trạng thái phi cổ điển [85]. Nếu một trạng thái có giá trị hàm Wigner âm thì trạng thái đó có tính phi Gauss, hay còn gọi là trạng thái phi cổ điển. Giá trị của hàm Wigner càng âm, tính chất phi cổ điển của các trạng thái càng được tăng cường. Vấn đề này rất được quan tâm nghiên cứu do khả năng ứng dụng cao của các trạng thái phi cổ điển trong các nhiệm vụ lượng tử khi các tính chất phi cổ điển của chúng được tăng cường [86].

Hàm Wigner có thể được viết dưới dạng các trạng thái kết hợp, đối với trường hai mode hàm Wigner có dạng

$$W(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4e^{2(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)}}{\pi^4} \int d^2u_1 d^2u_2 \langle -u_2, -u_1 | \hat{\rho}_{12} | u_1, u_2 \rangle \\ \times e^{2(\alpha_1 u_1^* + \alpha_2 u_2^* - \alpha_1^* u_1 - \alpha_2^* u_2)}, \quad (3.6)$$

trong đó $|u_1, u_2\rangle = |u_1\rangle \otimes |u_2\rangle$ là tích hai trạng thái kết hợp của hai mode độc lập. Áp dụng biểu thức (3.6) cho trạng thái kết hợp cặp chồng chất

thêm photon, hàm Wigner được xác định

$$W = \frac{4e^{2(|\alpha_a|^2 + |\alpha_b|^2)}}{\pi^4} \int d^2\gamma_a d^2\gamma_b \langle -\gamma_b, -\gamma_a | \hat{\rho}_{ab} | \gamma_a, \gamma_b \rangle_{ab} \times e^{2(\gamma_a^* \alpha_a + \gamma_b^* \alpha_b - \gamma_a \alpha_a^* - \gamma_b \alpha_b^*)}, \quad (3.7)$$

trong đó $\alpha_x = |\alpha_x|e^{i\varphi_x}$ là số phức trong không gian pha với $x = \{a, b\}$ và φ_x là số thực, $|\gamma_x\rangle_x$ là trạng thái kết hợp và $\hat{\rho}_{ab}$ là toán tử mật độ của SPAPCS.

Từ biểu thức (3.4), toán tử mật độ $\hat{\rho}_{ab}$ của SPAPCS có dạng cụ thể như sau:

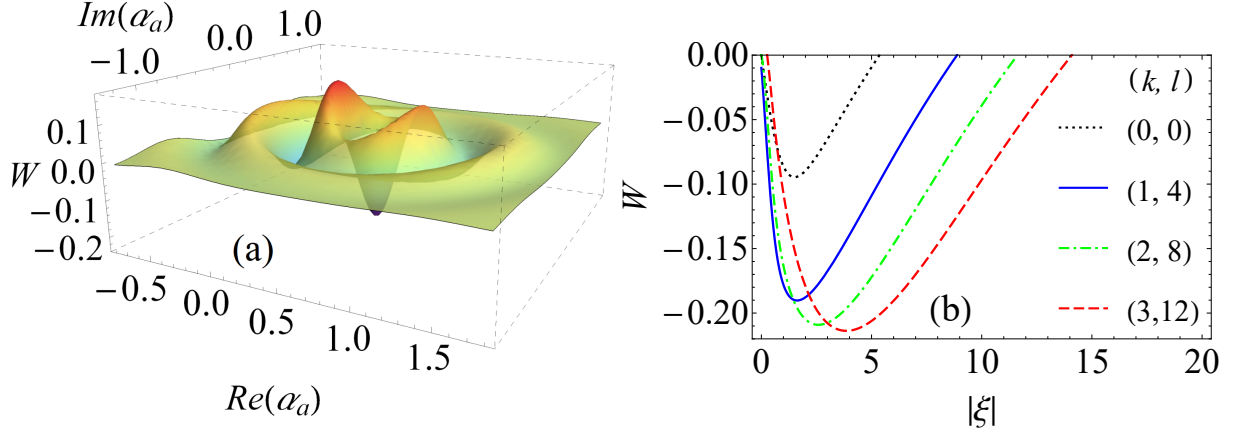
$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{ab} &= |\xi, q; k, l\rangle \langle \xi, q; k, l| \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^2 \mathcal{C}_{i,n} \mathcal{C}_{j,m}^* |n + a_i, n + b_i\rangle \langle m + a_j, m + b_j|, \end{aligned} \quad (3.8)$$

trong đó $\mathcal{C}_{i,n}$ được cho trong biểu thức (3.5). Thay $\hat{\rho}_{ab}$ từ biểu thức (3.8) vào biểu thức (3.7) và tính các tích phân phức, kết quả thu được như sau: (xem Phụ lục 2)

$$\begin{aligned} W &= \frac{4e^{-2|\alpha_a|^2 - 2|\alpha_b|^2}}{\pi^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^2 \frac{|\mathcal{C}_{i,n}| |\mathcal{C}_{j,m}| (4|\alpha_a \alpha_b|)^{m+n} |2\alpha_a|^{a_j+a_i} |2\alpha_b|^{b_j+b_i}}{\sqrt{(m+a_j)!(m+b_j)!(n+a_i)!(n+b_i)!}} \\ &\times {}_2F_0(-n-a_i, -m-a_j; ; -1/|2\alpha_a|^2) {}_2F_0(-n-b_i, -m-b_j; ; -1/|2\alpha_b|^2) \\ &\times \cos[(m-n+a_j-a_i)\varphi_a + (m-n+b_j-b_i)\varphi_b - (m-n)\phi], \end{aligned} \quad (3.9)$$

trong đó ${}_2F_0$ là kí hiệu của hàm siêu bội.

Biểu thức giải tích (3.9) được sử dụng để vẽ đồ thị hàm Wigner. Hình 3.1(a) là đồ thị của hàm W phụ thuộc vào các thành phần thực và ảo của tham số α . Chúng ta thấy rằng trong một vài vùng không gian pha, hàm Wigner có giá trị âm, nghĩa là trong vùng không gian pha này SPAPCS là trạng thái phi Gauss. Hình 3.1(b), các đường cong chỉ ra sự phụ thuộc của W theo tham số $|\xi|$ và bộ (k, l) là số photon được thêm vào



Hình 3.1: Hàm Wigner của SPAPCS với các tham số $q = 1$, $\sigma = 1$, $|\beta| = 0.3$, $\phi_a = \phi_b = \phi = 0$. Hình (a) là sự phụ thuộc của W theo các thành phần thực và ảo của α với $\xi = 4$ và $(k, l) = (3, 12)$. Hình (b) là sự phụ thuộc của W theo $|\xi|$ với $|\alpha| = 0.5$ và bộ (k, l) là $(0, 0)$ (đường chấm chấm màu đen), $(1, 4)$ (đường liền nét màu xanh đậm), $(2, 8)$ (đường gạch chấm xanh lá) và $(3, 12)$ (đường đứt nét màu đỏ).

hai mode của SPAPCS. Đường chấm chấm màu đen ứng với trường ở PCS ($k = l = 0$), các đường cong còn lại mô tả hàm Wigner của SPAPCS. Từ đồ thị, chúng ta nhận thấy trong cả hai trường hợp PCS và SPAPCS, hàm W luôn nhận giá trị âm nghĩa là các trạng thái này đều là các trạng thái phi Gauss. Giá trị của hàm W ứng với SPAPCS luôn luôn nhỏ hơn PCS. Hơn nữa, khi số photon được thêm vào hai mode càng tăng thì giá trị của hàm W càng âm. Điều này có nghĩa là khi thêm chồng chất các photon vào hai mode của PCS thì tính chất phi Gauss của SPAPCS càng được tăng cường, do đó trạng thái mà chúng tôi đề xuất thể hiện tính chất phi Gauss mạnh hơn trạng thái PCS ban đầu.

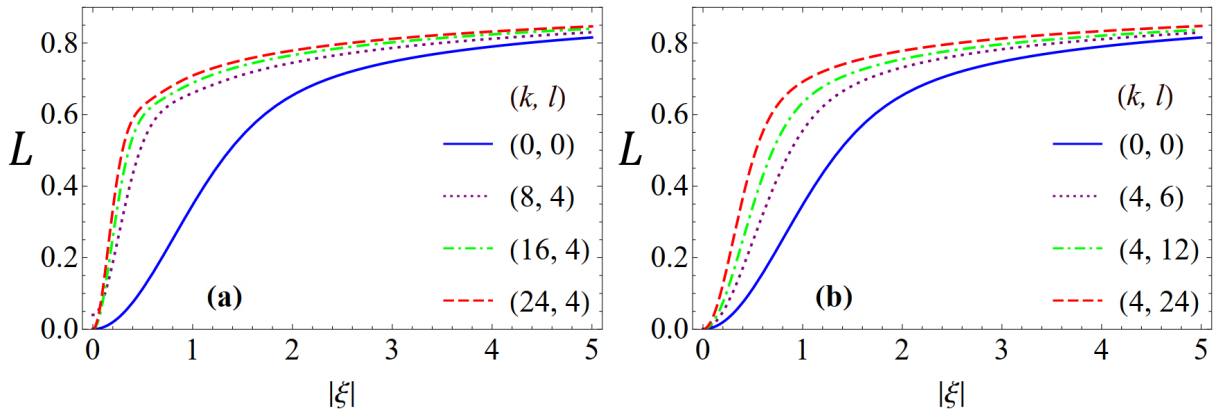
3.2.3. Tính chất rối

Để định lượng độ rối của trạng thái hai mode, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn entropy tuyến tính ở trạng thái dừng được xác định trong biểu thức (1.67) để khảo sát độ rối giữa photon các mode của SPAPCS. Áp dụng

biểu thức (3.8) của $\hat{\rho}_{ab}$ vào biểu thức (1.65), chúng ta thu được toán tử mật độ rút gọn của mode a là $\hat{\rho}_a$ và toán tử mật độ rút gọn của mode b là $\hat{\rho}_b$ và thay các kết quả này vào biểu thức (1.67), kết quả thu được entropy tuyến tính có dạng

$$\begin{aligned} L &= 1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_a^2) = 1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_b^2) \\ &= 1 - \mathcal{N}_{q;kl}^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{4n}}{(n!)^2((n+q)!)^2} \left\{ \frac{((n+k)!)^2}{(n!)^2} + \frac{\sigma^4((n+q+l)!)^2}{((n+q)!)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\sigma^2|\xi|^{2l}n!(n+k+l)!}{((n+l)!)^2} + \frac{2\sigma^2|\xi|^{2k}(n+q)!(n+q+k+l)!}{((n+q+k)!)^2} \right\}, \quad (3.10) \end{aligned}$$

trong đó hệ số $\mathcal{N}_{q;kl}$ được xác định ở biểu thức (3.3).



Hình 3.2: Hàm entropy tuyến tính L theo $|\xi|$ với $\phi = \pi, \sigma = 1, q = 3$. Trong hình (a) và (b) đường cong $(0, 0)$ tương ứng với PCS, các đường còn lại ứng với SPAPCS. Ở hình (a), các đường đứt nét ứng với trường hợp cố định $l = 4$ và k tăng. Ở hình (b), các đường đứt nét ứng với trường hợp cố định $k = 4$ và l tăng.

Từ kết quả (3.10), độ rối của SPAPCS được khảo sát theo tham số cường độ trường ban đầu $|\xi|$ và bộ tham số (k, l) là số photon được thêm vào hai mode của trường. Hình 3.2 mô tả sự phụ thuộc của L theo $|\xi|$ với $\phi = \pi, \sigma = 1$ và một số giá trị của cặp tham số (k, l) , trong đó các đường nét liền màu xanh ($k = l = 0$) tương ứng với PCS và các đường còn lại là SPAPCS. Trong hình 3.2(a) và hình 3.2(b), các đường cong chỉ ra khi l cố định và k tăng hoặc ngược lại khi k cố định và l tăng, thì L sẽ tăng

với mọi giá trị của $|\xi|$. Giá trị entropy tuyến tính L của SPAPCS luôn lớn hơn khi so sánh với PCS. Khi giá trị của $|\xi|$ càng lớn thì L hội tụ và tiến dần về trạng thái rối lý tưởng cực đại. Như vậy ta có thể kết luận rằng độ rối của SPAPCS luôn cao hơn PCS với mọi giá trị $|\xi|$ và độ rối càng được tăng cường nếu số photon thêm vào các mode của PCS tăng.

3.3. Các tính chất và các quá trình động học của trường ở trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon trong mô hình Jaynes-Cummings

3.3.1. Hamiltonian toàn phần của hệ nguyên tử-trường trong mô hình Jaynes-Cummings hai mode

Trong mục này chúng tôi khảo sát tương tác giữa một nguyên tử hai mức hiệu dụng với trường ở trạng thái hai mode được đề xuất là SPAPCS. Hệ tương tác nguyên tử-trường trong mô hình JC hai mode. Trong chương 2, chúng tôi khảo sát các quá trình động lượng tử của trường trong trường hợp lý tưởng, đó là môi trường chứa nguyên tử và trường không ảnh hưởng đến tương tác nguyên tử-trường. Trong chương này, cùng với việc nghiên cứu các quá trình động học của nguyên tử và trường SPAPCS trong tương tác nguyên tử-trường, ảnh hưởng của môi trường thực tế đến quá trình tương tác cũng được khảo sát thông qua tham số suy giảm γ . Áp dụng biểu thức (1.48), Hamiltonian của hệ trong mô hình JC hai mode được viết trong gần đúng sóng quay và bỏ qua hiệu ứng Stark có dạng

$$\hat{H}_{JC} = \omega_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_2 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega \hat{S}_z + \kappa \left(\hat{S}_{eg} \hat{a} \hat{b} + \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{S}_{ge} \right), \quad (3.11)$$

trong đó ω là tần số nguyên tử, ω_1 và ω_2 là các tần số tương ứng của photon mode a và mode b của trường SPAPCS, các toán tử $\hat{S}_z$, $\hat{S}_{eg}$ và $\hat{S}_{ge}$

là các toán tử dịch chuyển nguyên tử, hệ số κ là hằng số tương tác giữa nguyên tử và trường, và các kí hiệu e, g chỉ các mức kích thích và cơ bản của nguyên tử.

Chúng tôi chọn hệ hai vectơ cơ sở trong biểu diễn trạng thái mặc áo $|e, n + q + k, n + l\rangle$ và $|g, n + q + k + 1, n + l + 1\rangle$, do đó các hàm riêng của toán tử $\hat{H}_{JC}$ có dạng

$$|\psi_n^\pm\rangle = \beta_n^\pm |e, n + q + k, n + l\rangle \pm \beta_n^\mp |g, n + q + k + 1, n + l + 1\rangle, \quad (3.12)$$

trong đó

$$\beta_n^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{\Delta}{\Delta_n}}, \quad (3.13)$$

và

$$\Delta_n = \sqrt{\Delta^2 + 4\kappa^2(n + q + k + 1)(n + l + 1)}, \quad (3.14)$$

trong đó Δ là tham số điều hưởng thỏa mãn điều kiện $\Delta = \omega - (\omega_1 + \omega_2)$. Trong mô hình tán sắc, chúng tôi xem tần số của các photon trong khoang không cộng hưởng với tần số nguyên tử, nghĩa là Hamiltonian tương tác được xem như một nhiễu loạn nhỏ. Do đó, Hamiltonian (3.11) trong mô hình tán sắc trở thành Hamiltonian hiệu dụng có dạng sau [77, 87]

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} = & \omega_1 \hat{a}^+ \hat{a} + \omega_2 \hat{b}^+ \hat{b} + \omega \hat{S}_z \\ & + \lambda \left[(\hat{a}^+ \hat{a} + 1)(\hat{b}^+ \hat{b} + 1) |e\rangle \langle e| - \hat{a}^+ \hat{a} \hat{b}^+ \hat{b} |g\rangle \langle g| \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

trong đó $\lambda = \kappa^2/\Delta$. Hamiltonian hiệu dụng $\hat{H}_{eff}$ có các hàm riêng được xác định trong biểu thức (3.12) tương ứng với các trị riêng sau

$$E_n^\pm \simeq \omega_1 \left(n + q + k + \frac{1}{2} \right) + \omega_2 \left(n + l + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \Delta \pm \lambda (n + q + k + 1)(n + l + 1). \quad (3.16)$$

3.3.2. Toán tử ma trận mật độ của hệ nguyên tử-trường

Sự tiến triển theo thời gian của hệ nguyên tử-trường được biểu diễn qua toán tử mật độ theo thời gian $\hat{\rho}(t)$ mà thỏa mãn phương trình chủ

sau [79]

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -i \left[\hat{H}_{eff}, \hat{\rho}(t) \right] + (\hat{L}_1 + \hat{L}_2) \hat{\rho}(t), \quad (3.17)$$

trong đó $\hat{L}_i$ với $i = \{1, 2\}$ là các siêu toán tử biểu diễn sự mất mát trong môi trường. Ở nhiệt độ 0 K, các siêu toán tử cho suy giảm pha này được cho dưới dạng

$$\hat{L}_i \hat{\rho}(t) = \gamma \left[2\hat{a}_i^+ \hat{a}_i \hat{\rho}(t) \hat{a}_i^+ \hat{a}_i - \hat{\rho}(t) (\hat{a}_i^+ \hat{a}_i)^2 - (\hat{a}_i^+ \hat{a}_i)^2 \hat{\rho}(t) \right], \quad (3.18)$$

trong đó, γ là hệ số suy giảm thể hiện ảnh hưởng của môi trường đến tương tác nguyên tử-trường. Áp dụng các biểu thức (3.15) và (3.18) vào biểu thức (3.17), phương trình chủ được viết lại thành

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = & -i\lambda \left[(\hat{a}^+ \hat{a} + 1)(\hat{b}^+ \hat{b} + 1) |e\rangle \langle e| - \hat{a}^+ \hat{a} \hat{b}^+ \hat{b} |g\rangle \langle g|, \hat{\rho}(t) \right] \\ & + \gamma \sum_{i=1}^2 \left[2\hat{a}_i^+ \hat{a}_i \hat{\rho}(t) \hat{a}_i^+ \hat{a}_i - \hat{\rho}(t) (\hat{a}_i^+ \hat{a}_i)^2 - (\hat{a}_i^+ \hat{a}_i)^2 \hat{\rho}(t) \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

trong đó các chỉ số $i = \{1, 2\}$ tương ứng với các mode a và b của trường SPAPCS. Trong vế phải của biểu thức (3.19), số hạng đầu tiên là giao hoán tử giữa Hamiltonian tương tác trong biểu thức (3.15) và toán tử mật độ $\hat{\rho}(t)$, số hạng thứ hai biểu diễn sự mất mát của khoang do suy giảm pha gây ra.

Giả sử rằng tại thời điểm ban đầu $t = 0$, toán tử mật độ là sự kết hợp giữa trạng thái của nguyên tử và trường có dạng

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_F(0), \quad (3.20)$$

trong đó $\hat{\rho}_A(0) = |A\rangle \langle A|$ và $\hat{\rho}_F(0) = |F\rangle \langle F|$. Xét nguyên tử ban đầu ở một trạng thái chồng chập $|A\rangle = \mu_e |e\rangle + \mu_g |g\rangle$ với $|\mu_e|^2 + |\mu_g|^2 = 1$ và trường ở SPAPCS được xác định trong biểu thức (3.4). Từ đó chúng ta có dạng của toán tử mật độ tại $t = 0$ như sau:

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_{ee}(0) |e\rangle \langle e| + \hat{\rho}_{gg}(0) |g\rangle \langle g| + \hat{\rho}_{eg}(0) |e\rangle \langle g| + \hat{\rho}_{ge}(0) |g\rangle \langle e|, \quad (3.21)$$

trong đó các yếu tố ma trận

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{ij}(0) = \mu_i \mu_j^* \sum_{n,m=0}^{\infty} & \left(\mathcal{C}_{1,n} \mathcal{C}_{1,m}^* |n + a_1, n + b_1\rangle \langle m + a_1, m + b_1| \right. \\ & + \mathcal{C}_{2,n} \mathcal{C}_{2,m}^* |n + a_2, n + b_2\rangle \langle m + a_2, m + b_2| \\ & + \mathcal{C}_{1,n} \mathcal{C}_{2,m}^* |n + a_1, n + b_1\rangle \langle m + a_2, m + b_2| \\ & \left. + \mathcal{C}_{2,n} \mathcal{C}_{1,m}^* |n + a_2, n + b_2\rangle \langle m + a_1, m + b_1| \right),\end{aligned}\quad (3.22)$$

với $i, j = \{e, g\}$ và $i \neq j$.

Toán tử mật độ theo thời gian $\hat{\rho}(t)$ có dạng như sau:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_{ee}(t) |e\rangle \langle e| + \hat{\rho}_{gg}(t) |g\rangle \langle g| + \hat{\rho}_{eg}(t) |e\rangle \langle g| + \hat{\rho}_{ge}(t) |g\rangle \langle e|, \quad (3.23)$$

trong đó các yếu tố ma trận $\hat{\rho}_{ij}(t)$ với $i, j = \{e, g\}$ được xác định từ phương trình

$$\frac{d\hat{\rho}_{ij}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \langle i | \hat{\rho}(t) | j \rangle = \hat{L}_{ij} \hat{\rho}_{ij}(t). \quad (3.24)$$

Đây là phương trình vi phân bậc nhất theo thời gian nên kết quả của các yếu tố ma trận $\hat{\rho}_{ij}(t)$ được suy ra từ biểu thức sau

$$\hat{\rho}_{ij}(t) = e^{\hat{L}_{ij}t} \hat{\rho}_{ij}(0). \quad (3.25)$$

Thay vế phải của phương trình (3.19) vào vế trái của phương trình (3.24) lần lượt cho các yếu tố ma trận của toán tử ma trận mật độ, ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{ee}(t) = & -i\lambda \left[(\hat{a}^+ \hat{a} + 1) (\hat{b}^+ \hat{b} + 1) \rho_{ee}(t) - \rho_{ee}(t) (\hat{a}^+ \hat{a} + 1) (\hat{b}^+ \hat{b} + 1) \right] \\ & + \gamma \left[2\hat{a}^+ \hat{a} \hat{\rho}_{ee}(t) \hat{a}^+ \hat{a} - \hat{\rho}_{ee}(t) \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} - \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} \hat{\rho}_{ee}(t) \right] \\ & + \gamma \left[2\hat{b}^+ \hat{b} \hat{\rho}_{ee}(t) \hat{b}^+ \hat{b} - \hat{\rho}_{ee}(t) \hat{b}^+ \hat{b} \hat{b}^+ \hat{b} - \hat{b}^+ \hat{b} \hat{b}^+ \hat{b} \hat{\rho}_{ee}(t) \right] \\ = & \hat{L}_{ee} \hat{\rho}_{ee}(t).\end{aligned}\quad (3.26)$$

Ở đây chúng ta sử dụng các siêu toán tử được định nghĩa như sau [87]

$$\hat{M}_1 = (\hat{a}^+ \hat{a}), \quad \hat{M}_2 = (\hat{b}^+ \hat{b}).$$

$$\hat{P}_1 = .(\hat{a}^+ \hat{a}) \quad \hat{P}_2 = .(\hat{b}^+ \hat{b})$$

Nên siêu toán tử $\hat{L}_{ee}$ trong biểu thức (3.26) có dạng

$$\begin{aligned} \hat{L}_{ee} &= -i\lambda \left[(\hat{M}_1 + 1)(\hat{M}_2 + 1) - (\hat{P}_1 + 1)(\hat{P}_2 + 1) \right] \\ &\quad + \gamma \left(2\hat{M}_1\hat{P}_1 - \hat{P}_1^2 - \hat{M}_1^2 + 2\hat{M}_2\hat{P}_2 - \hat{P}_2^2 - \hat{M}_2^2 \right), \\ &= -i\lambda \left[(\hat{M}_1 + 1)(\hat{M}_2 + 1) - (\hat{P}_1 + 1)(\hat{P}_2 + 1) \right] \\ &\quad - \gamma \left[\left(\hat{M}_1 - \hat{P}_1 \right)^2 + \left(\hat{M}_2 - \hat{P}_2 \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Từ biểu thức (3.25) và biểu thức (3.26), suy ra

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = e^{\hat{L}_{ee}t} \hat{\rho}_{ee}(0), \quad (3.28)$$

trong đó $\hat{\rho}_{ee}(0)$ được xác định từ biểu thức (3.21). Chúng ta thu được kết quả

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{ee}(t) &= |\mu_e|^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \left\{ \mathcal{C}_{1,n} \mathcal{C}_{1,m}^* e^{-i\lambda t[(n+a_1+1)(n+b_1+1)-(m+a_1+1)(m+b_1+1)]} \right. \\ &\quad \times e^{-2\gamma t(n-m)^2} |n+a_1, n+b_1\rangle \langle m+a_1, m+b_1| \\ &\quad + \mathcal{C}_{2,n} \mathcal{C}_{2,m}^* e^{-i\lambda t[(n+a_2+1)(n+b_2+1)-(m+a_2+1)(m+b_2+1)]} \\ &\quad \times e^{-2\gamma t(n-m)^2} |n+a_2, n+b_2\rangle \langle m+a_2, m+b_2| \\ &\quad + \mathcal{C}_{1,n} \mathcal{C}_{2,m}^* e^{-i\lambda t[(n+a_1+1)(n+b_1+1)-(m+a_2+1)(m+b_2+1)]} \\ &\quad \times e^{-\gamma t[(n-m+a_1-a_2)^2+(n-m+b_1-b_2)^2]} \\ &\quad \times |n+a_1, n+b_1\rangle \langle m+a_2, m+b_2| \\ &\quad + \mathcal{C}_{2,n} \mathcal{C}_{1,m}^* e^{-i\lambda t[(n+a_2+1)(n+b_2+1)-(m+a_1+1)(m+b_1+1)]} \\ &\quad \times e^{-\gamma t[(n-m+a_2-a_1)^2+(n-m+b_2-b_1)^2]} \\ &\quad \left. \times |n+a_2, n+b_2\rangle \langle m+a_1, m+b_1| \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Biểu thức (3.29) được viết gọn lại dưới dạng

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = |\mu_e|^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^2 \left(\mathcal{C}_{i,n} \mathcal{C}_{j,m}^* e^{-i\lambda t[\theta_{i(n+1)} - \theta_{j(m+1)}]} e^{-\gamma t \Gamma_{ij}} \right)$$

$$\times |n + a_i, n + b_i\rangle \langle m + a_j, m + b_j|), \quad (3.30)$$

với các hệ số

$$\theta_{in} = (n + a_i)(n + b_i), \quad (3.31)$$

và

$$\Gamma_{ij} = (n - m + a_i - a_j)^2 + (n - m + b_i - b_j)^2. \quad (3.32)$$

Một cách tương tự, các yếu tố ma trận theo thời gian còn lại của $\hat{\rho}(t)$ có kết quả

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{gg}(t) = & |\mu_g|^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^2 \left(\mathcal{C}_{i,n} \mathcal{C}_{j,m}^* e^{-i\lambda t[\theta_{im} - \theta_{jn}]} e^{-\gamma t \Gamma_{ij}} \right. \\ & \times |n + a_i, n + b_i\rangle \langle m + a_j, m + b_j| \Big), \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{eg}(t) = & (\hat{\rho}_{ge}(t))^+ \\ = & \mu_e \mu_g^* \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^2 \left(\mathcal{C}_{i,n} \mathcal{C}_{j,m}^* e^{-i\lambda t[\theta_{i(n+1)} + \theta_{jm}]} e^{-\gamma t \Gamma_{ij}} \right. \\ & \times |n + a_i, n + b_i\rangle \langle m + a_j, m + b_j| \Big). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Áp dụng biểu thức (1.69) để xác định các toán tử mật độ nguyên tử và toán tử mật độ trường rút gọn. Thực hiện việc lấy vết của toán tử $\hat{\rho}(t)$ trong biểu thức (3.23) theo hai mode của trường SPAPCS và theo nguyên tử, chúng ta thu được các kết quả sau:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A(t) = & |\mu_e|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\mathcal{C}_{1,n}|^2 + |\mathcal{C}_{2,n}|^2 + (\mathcal{C}_{1,n} \mathcal{C}_{2,n}^* + \mathcal{C}_{2,n} \mathcal{C}_{1,n}^*) \delta_{k+l,0} \right] |e\rangle \langle e| \\ & + |\mu_g|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\mathcal{C}_{1,n}|^2 + |\mathcal{C}_{2,n}|^2 + (\mathcal{C}_{1,n} \mathcal{C}_{2,n}^* + \mathcal{C}_{2,n} \mathcal{C}_{1,n}^*) \delta_{k+l,0} \right] |g\rangle \langle g| \\ & + \mu_e \mu_g^* \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\mathcal{C}_{1,n}|^2 e^{-i\lambda t(\theta_{1(n+1)} + \theta_{1n})} + |\mathcal{C}_{2,n}|^2 e^{-i\lambda t(\theta_{2(n+1)} + \theta_{2n})} \right. \\ & + \left(\mathcal{C}_{1,n} \mathcal{C}_{2,n}^* e^{-i\lambda t(\theta_{1(n+1)} + \theta_{2n})} + \mathcal{C}_{2,n} \mathcal{C}_{1,n}^* e^{-i\lambda t(\theta_{2(n+1)} + \theta_{1n})} \right) \delta_{k+l,0} \Big] |e\rangle \langle g| \\ & + \mu_g \mu_e^* \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\mathcal{C}_{1,n}|^2 e^{i\lambda t(\theta_{1(n+1)} + \theta_{1n})} + |\mathcal{C}_{2,n}|^2 e^{i\lambda t(\theta_{2(n+1)} + \theta_{2n})} \right. \\ & + \left(\mathcal{C}_{1,n} \mathcal{C}_{2,n}^* e^{i\lambda t(\theta_{1(n+1)} + \theta_{2n})} + \mathcal{C}_{2,n} \mathcal{C}_{1,n}^* e^{i\lambda t(\theta_{2(n+1)} + \theta_{1n})} \right) \delta_{k+l,0} \Big] |g\rangle \langle e| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\mathcal{C}_{1,n} \mathcal{C}_{2,n}^* e^{i\lambda t(\theta_{1n} + \theta_{2(n+1)})} + \mathcal{C}_{2,n} \mathcal{C}_{1,n}^* e^{i\lambda t(\theta_{2n} + \theta_{1(n+1)})} \right) \\
& \times \delta_{k+l,0} \Big] |g\rangle \langle e|, \tag{3.35}
\end{aligned}$$

và

$$\hat{\rho}_F(t) = \hat{\rho}_{ee}(t) + \hat{\rho}_{gg}(t), \tag{3.36}$$

trong đó $\hat{\rho}_{ee}(t)$ và $\hat{\rho}_{gg}(t)$ được cho trong các biểu thức (3.30) và biểu thức (3.33).

3.3.3. Định lượng độ rối theo thời gian

Tiêu chuẩn entropy tuyến tính rất hữu ích trong việc khảo sát độ rối giữa các thành phần trong hệ [87],[88], nhất là các quá trình rối động trong các tương tác nguyên tử-trường [77]. Ảnh hưởng của các tham số như suy giảm pha và việc thêm photon vào hai mode của trường lên tương tác nguyên tử-trường được khảo sát thông qua tiêu chuẩn entropy tuyến tính này [80]. Tiêu chuẩn này không chỉ định lượng độ rối theo thời gian mà còn mô tả sự mất mát độ tinh khiết của hệ [87]. Trong mục này chúng tôi khảo sát các quá trình rối động của hệ bao gồm một nguyên tử và hai mode của trường SPAPCS và khảo sát độ rối của hệ gồm một mode của trường SPAPCS và hệ con (nguyên tử+mode còn lại của trường). Khi khảo sát các quá trình rối động giữa nguyên tử và trường SPAPCS, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn entropy tuyến tính của các thành phần trong hệ được xác định trong biểu thức (1.68). Tương tự, entropy tuyến tính của cả hệ nguyên tử-trường theo thời gian được cho bởi [77]

$$L(t) = 1 - \text{Tr}[\hat{\rho}^2(t)], \tag{3.37}$$

trong đó $\hat{\rho}(t)$ là toán tử mật độ của hệ theo thời gian trong biểu thức (3.23). Entropy tuyến tính của hệ $L(t)$ có mối liên hệ với entropy tuyến

tính trường rút gọn $L_F(t)$ và chỉ ra ảnh hưởng của môi trường đến hai mode của trường trong quá trình chúng tương tác với nguyên tử.

3.3.3.1. Định lượng độ rối theo thời gian của hệ nguyên tử-trường

Sử dụng các biểu thức (1.68), (3.37) và lấy vết theo nguyên tử, trường cũng như cả nguyên tử và trường, chúng tôi thu được kết quả giải tích của entropy tuyến tính trường rút gọn

$$\begin{aligned}
L_F(t) &= 1 - \text{Tr}[\hat{\rho}_F^2(t)] \\
&= 1 - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[\sum_{i,j=1}^2 |\mathcal{C}_{i,n}\mathcal{C}_{j,m}|^2 \left(|\mu_e|^4 + |\mu_g|^4 + 2|\mu_e\mu_g|^2 \cos \lambda t \eta_{ij} \right) e^{-2\gamma t \Gamma_{ij}} \right. \\
&\quad \left. + F(\mathcal{C}_{n,m}) \delta_{k+l,0} e^{-4\gamma t(n-m)^2} \right. \\
&\quad \left. \times \left(|\mu_e|^4 + |\mu_g|^4 + 2|\mu_e\mu_g|^2 \cos \lambda t \eta(n, m) \right) \right], \tag{3.38}
\end{aligned}$$

entropy tuyến tính nguyên tử rút gọn

$$\begin{aligned}
L_A(t) &= 1 - \text{Tr}[\hat{\rho}_A^2(t)] \\
&= 1 - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[\sum_{i,j=1}^2 |\mathcal{C}_{i,n}\mathcal{C}_{j,m}|^2 \left(|\mu_e|^4 + |\mu_g|^4 + 2|\mu_e\mu_g|^2 \cos \lambda t \eta_{ij} \right) \right. \\
&\quad \left. + F(\mathcal{C}_{n,m}) \delta_{k+l,0} \left(|\mu_e|^4 + |\mu_g|^4 + 2|\mu_e\mu_g|^2 \cos \lambda t \eta(n, m) \right) \right], \tag{3.39}
\end{aligned}$$

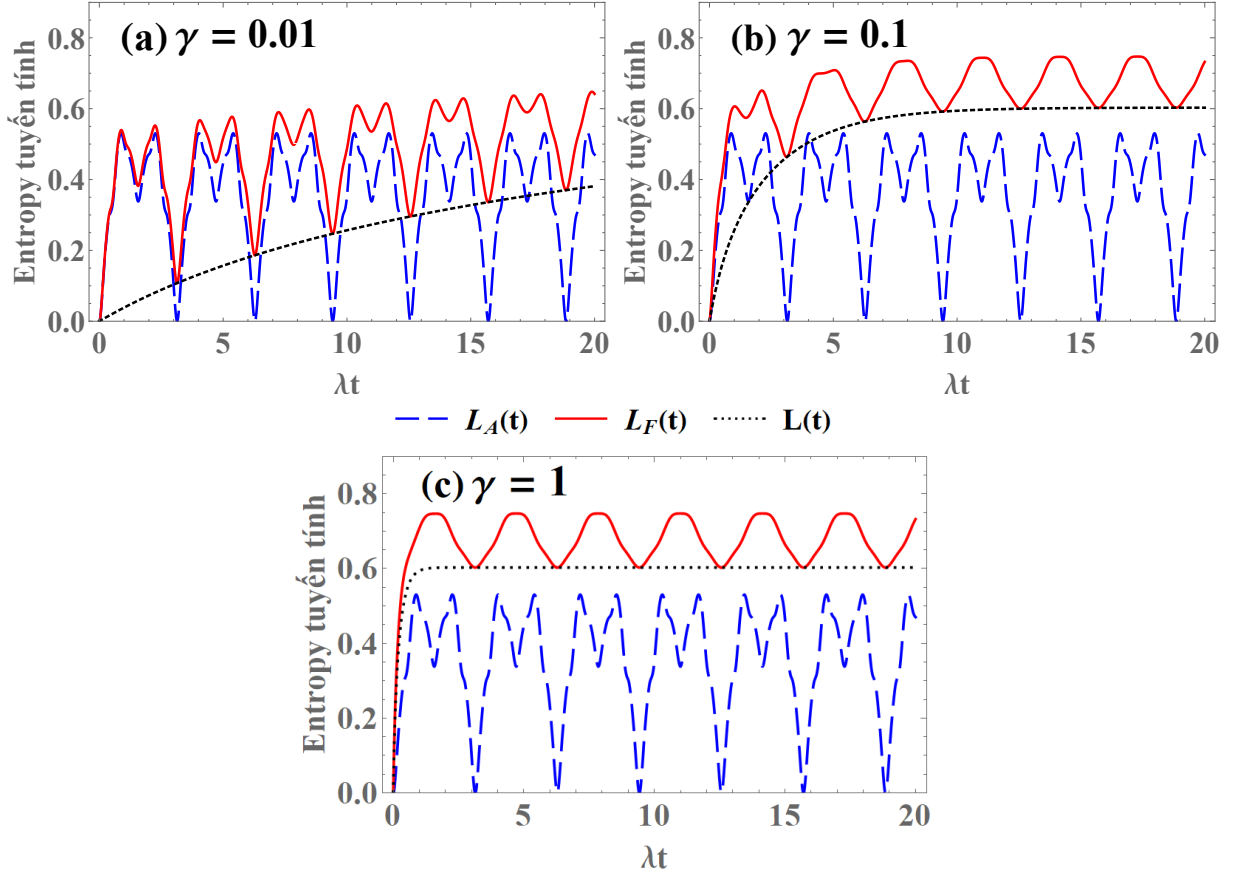
và entropy tuyến tính của cả hệ

$$\begin{aligned}
L(t) &= 1 - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[\sum_{i,j=1}^2 |\mathcal{C}_{i,n}\mathcal{C}_{j,m}|^2 e^{-2\gamma t \Gamma_{ij}} \right. \\
&\quad \left. + F(\mathcal{C}_{n,m}) \delta_{k+l,0} e^{-4\gamma t(n-m)^2} \right], \tag{3.40}
\end{aligned}$$

trong đó

$$\eta_{ij} = \theta_{i(n+1)} + \theta_{in} - \theta_{j(m+1)} - \theta_{jm}, \quad (i, j = 1, 2, i \neq j), \tag{3.41}$$

$$\eta(n, m) = (n+q+1)(n+1) + (n+q)n - (m+q+1)(m+1) + (m+q)m, \tag{3.42}$$

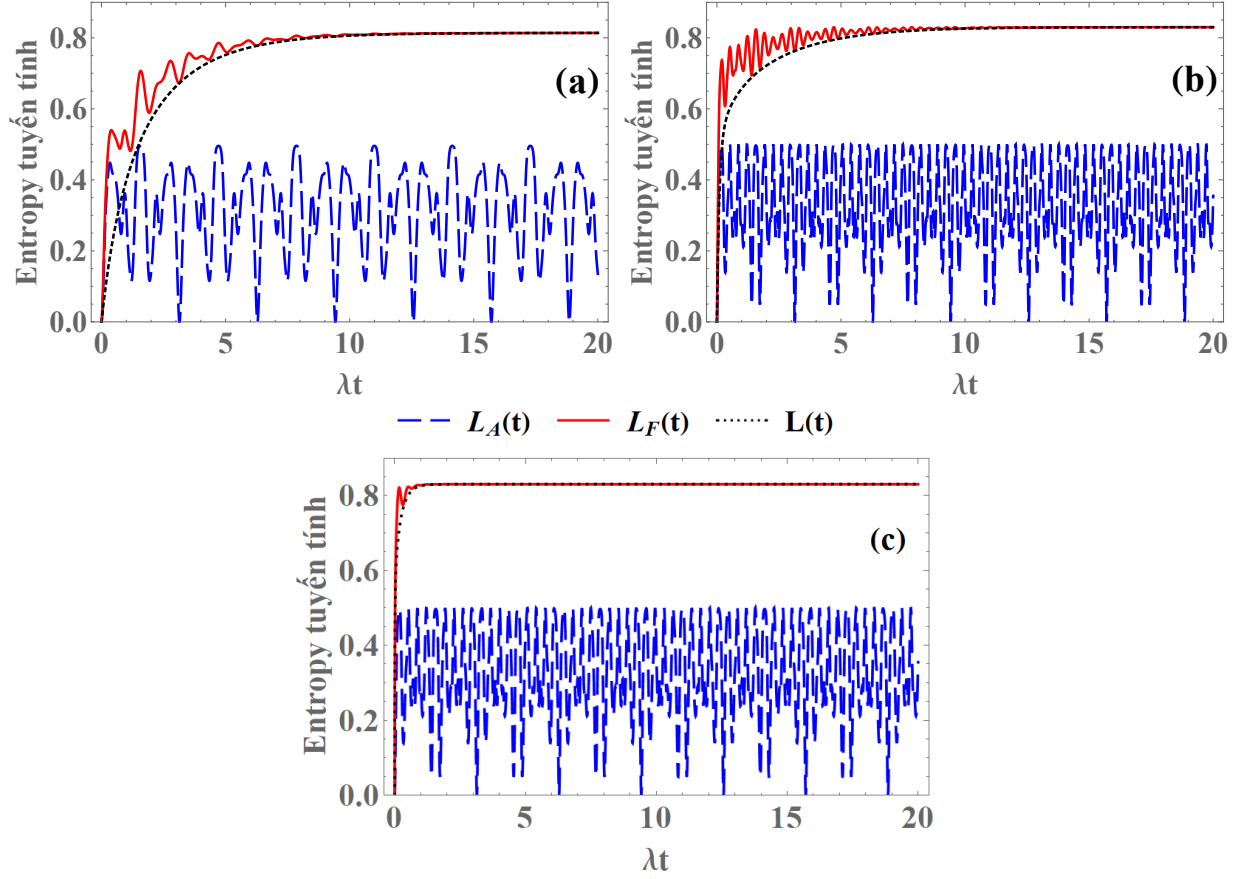


Hình 3.3: Sự phụ thuộc của entropy tuyến tính theo λt trong các trường hợp (a) $\gamma = 0.01$, (b) $\gamma = 0.1$ và (c) $\gamma = 1$ with $|\xi|^2 = 1, q = 0, k = l = 0, \mu_e = \mu_g = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Đường đứt nét màu xanh là $L_A(t)$, đường liền nét màu đỏ là $L_F(t)$ và đường chấm chấm màu đen là $L(t)$.

$$\begin{aligned}
F(\mathcal{C}_{n,m}) = & \mathcal{C}_{1,n} \mathcal{C}_{1,m}^* \mathcal{C}_{2,m} \mathcal{C}_{2,n}^* + \mathcal{C}_{1,n} |\mathcal{C}_{1,m}|^2 \mathcal{C}_{2,n}^* \\
& + |\mathcal{C}_{1,n}|^2 \mathcal{C}_{1,m}^* \mathcal{C}_{2,m} + \mathcal{C}_{1,m} |\mathcal{C}_{2,n}|^2 \mathcal{C}_{2,m}^* \\
& + \mathcal{C}_{1,n}^* |\mathcal{C}_{2,m}|^2 \mathcal{C}_{2,n} + \mathcal{C}_{1,n} \mathcal{C}_{1,m} \mathcal{C}_{2,n}^* \mathcal{C}_{2,m}^* + h.c., \quad (3.43)
\end{aligned}$$

và các hệ số $\mathcal{C}_{i,n}, \theta_{in}, \Gamma_{ij}$ được xác định trong các biểu thức (3.5), (3.31) và (3.32).

Từ các biểu thức (3.38) và biểu thức (3.39), khi bỏ qua hiệu ứng suy giảm pha, chúng ta thấy rằng $L_F(t)$ trùng với $L_A(t)$ và chúng dao động tuần hoàn với giá trị cực đại 0.5. Tuy nhiên, khi tính đến suy giảm pha $\gamma \neq 0$, thì hai hàm này không còn trùng nhau. Hình 3.3 vẽ sự phụ thuộc của các entropy tuyến tính của nguyên tử $L_A(t)$, của trường $L_F(t)$ và của



Hình 3.4: Sự phụ thuộc của entropy tuyến tính theo λt với các tham số cố định $|\xi|^2 = 1, \mu_e = \mu_g = \frac{1}{\sqrt{2}}, q = 0, \sigma = 1$, trường hợp (a) $k = l = 1, \gamma = 0.1$, (b) $k = l = 5, \gamma = 0.1$ và (c) $k = l = 5, \gamma = 1$.

cả hệ $L(t)$ theo λt trong trường hợp PCS ($k = l = 0$). Sự dao động của $L_A(t)$ là quy tắc và tuần hoàn theo thời gian, giá trị cực đại của $L_A(t)$ không bị ảnh hưởng bởi γ . Trong khi đó, sự thay đổi của hệ số suy giảm pha γ ảnh hưởng rõ rệt đến sự dao động của $L_F(t)$, trong đó γ càng lớn, sự dao động của $L_F(t)$ càng tăng. Trường hợp $\gamma = 1$, entropy tuyến tính $L_F(t)$ dao động tuần hoàn và đạt đến giá trị cực đại 0.75. Khi nguyên tử và trường không rơi nghĩa là entropy của nguyên tử đạt giá trị 0, entropy tuyến tính của trường $L_F(t)$ đạt giá trị cực tiểu, đó cũng chính là entropy tuyến tính của hệ $L(t)$ tại cùng thời điểm. Các hình từ 3.3(a) đến hình 3.3(c) cho thấy các giá trị cực trị địa phương của $L_F(t)$ (cực đại và cực tiểu) bị ảnh hưởng bởi suy giảm pha, các giá trị này càng tăng khi hệ số

suy giảm γ càng lớn [89].

Hình 3.4 được vẽ giống hình 3.3 nhưng cho trường hợp SPAPCS ($k = l \neq 0$) với các tham số suy giảm khác nhau $\gamma = 0.1$ (hình 3.4a và hình 3.4b) và $\gamma = 1$ (hình 3.4c). Chúng ta thấy rằng việc thêm các photon vào hai mode của trường SPAPCS sẽ làm tăng các giá trị của $L_F(t)$ và $L(t)$, giá trị cực đại của chúng đạt hơn 0.8, trong khi giá trị này chỉ đạt 0.75 cho trường hợp PCS (hình 3.3). Hơn nữa, việc càng thêm photon vào hai mode của trường càng làm cho sự dao động của $L_F(t)$ dần suy giảm và biến mất theo λt . Cho dù việc thêm photon không làm thay đổi giá trị của $L_A(t)$, nhưng làm thay đổi chu kỳ dao động của nó. Khi $\gamma = 1$ và $k = l = 5$, $L_F(t)$ và $L(t)$ tiến dần đến một giá trị ổn định xấp xỉ hơn 0.8. Điều này cho thấy vai trò của việc thêm photon và hiệu ứng suy giảm pha trong việc tăng cường độ rối giữa nguyên tử và trường SPAPCS thông qua các hàm $L_F(t)$ và $L(t)$.

3.3.3.2. Định lượng độ rối theo thời gian của hệ con và một mode của trường SPAPCS

Chúng tôi tiếp tục khảo sát một hệ ba thành phần gồm các mode a , mode b của trường SPAPCS và nguyên tử. Trong hệ này, chúng tôi muốn khảo sát độ rối của một mode của trường và phần còn lại của toàn bộ hệ. Hàm $L_{F_a}(t)$ là độ rối giữa mode a của trường SPAPCS và phần còn lại của hệ (nguyên tử+mode b), hàm $L_{AF_b}(t)$ là độ rối giữa hệ hai thành phần gồm nguyên tử và mode b của SPAPCS với mode a còn lại của trường. $L_{F_a}(t)$ và $L_{AF_b}(t)$ được xác định từ các biểu thức sau

$$L_{F_a}(t) = 1 - \text{Tr} [\hat{\rho}_{F_a}(t)]^2, \quad (3.44)$$

và

$$L_{AF_b}(t) = 1 - \text{Tr} [\hat{\rho}_{AF_b}(t)]^2, \quad (3.45)$$

trong đó $\hat{\rho}_{F_a}(t)$, $\hat{\rho}_{AF_b}(t)$ là các toán tử mật độ rút gọn theo thời gian của mode a và hệ con có dạng như sau:

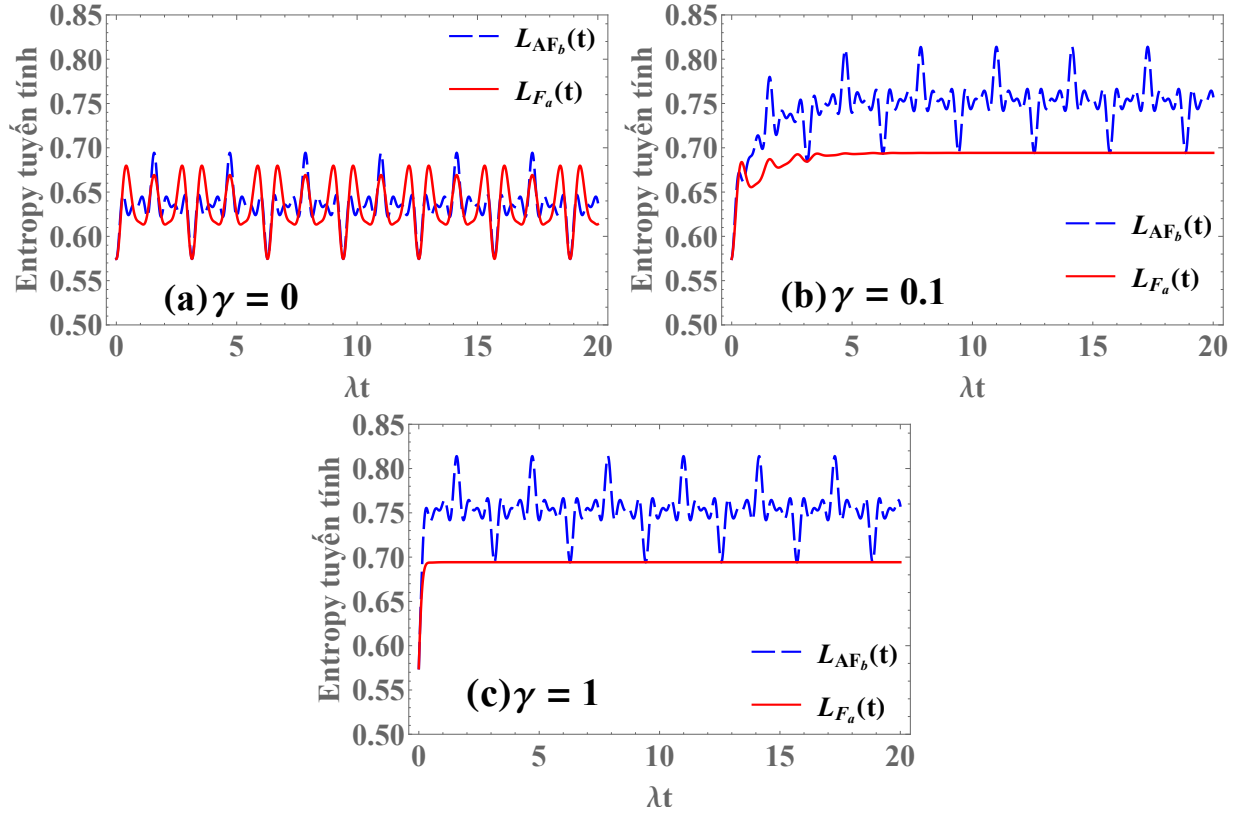
$$\hat{\rho}_{F_a}(t) = \text{Tr}_{AF_b} \hat{\rho}(t), \quad (3.46)$$

$$\hat{\rho}_{AF_b}(t) = \text{Tr}_{F_a} \hat{\rho}(t). \quad (3.47)$$

Thay các biểu thức (3.23), (3.46) và (3.47) vào các biểu thức (3.44) và (3.45), kết quả thu được

$$\begin{aligned} L_{F_a}(t) = & 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ |\mathcal{C}_{1,n}|^4 + |\mathcal{C}_{2,n}|^4 + |\mathcal{C}_{1,n}\mathcal{C}_{2,(n+a_1-a_2)}|^2 + |\mathcal{C}_{2,n}\mathcal{C}_{1,(n+a_2-a_1)}|^2 \right. \\ & + |\mathcal{C}_{1,n}\mathcal{C}_{2,(n+b_1-b_2)}|^2 e^{-2\gamma t(b_1-b_2+a_2-a_1)^2} \\ & \times \left(|\mu_e|^4 + |\mu_g|^4 + 2|\mu_e\mu_g|^2 \cos \lambda u_1 t \right) \\ & + |\mathcal{C}_{2,n}\mathcal{C}_{1,(n+b_2-b_1)}|^2 e^{-2\gamma t(b_2-b_1+a_1-a_2)^2} \\ & \times \left(|\mu_e|^4 + |\mu_g|^4 + 2|\mu_e\mu_g|^2 \cos \lambda v_1 t \right) \\ & \left. + \left(F(\mathcal{C}_{n,n}) - 2|\mathcal{C}_{1,n}\mathcal{C}_{2,n}|^2 \right) \delta_{k+l,0} \right\}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} L_{AF_b}(t) = & 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ |\mathcal{C}_{1,n}|^4 + |\mathcal{C}_{2,n}|^4 + \left(F(\mathcal{C}_{n,n}) - 2|\mathcal{C}_{1n}\mathcal{C}_{2n}|^2 \right) \delta_{k+l,0} \right. \\ & + |\mathcal{C}_{1,n}\mathcal{C}_{2,(n+b_1-b_2)}|^2 \left(|\mu_e|^4 + |\mu_g|^4 + 2|\mu_e\mu_g|^2 \cos \lambda u_2 t \right) \\ & + |\mathcal{C}_{2,n}\mathcal{C}_{1,(n+b_2-b_1)}|^2 \left(|\mu_e|^4 + |\mu_g|^4 + 2|\mu_e\mu_g|^2 \cos \lambda v_2 t \right) \\ & + \left(|\mathcal{C}_{1,n}\mathcal{C}_{2,(n+a_1-a_2)}|^2 + |\mathcal{C}_{2,n}\mathcal{C}_{1,(n+a_2-a_1)}|^2 \right) \\ & \left. \times e^{-2\gamma t(b_1-b_2+a_2-a_1)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

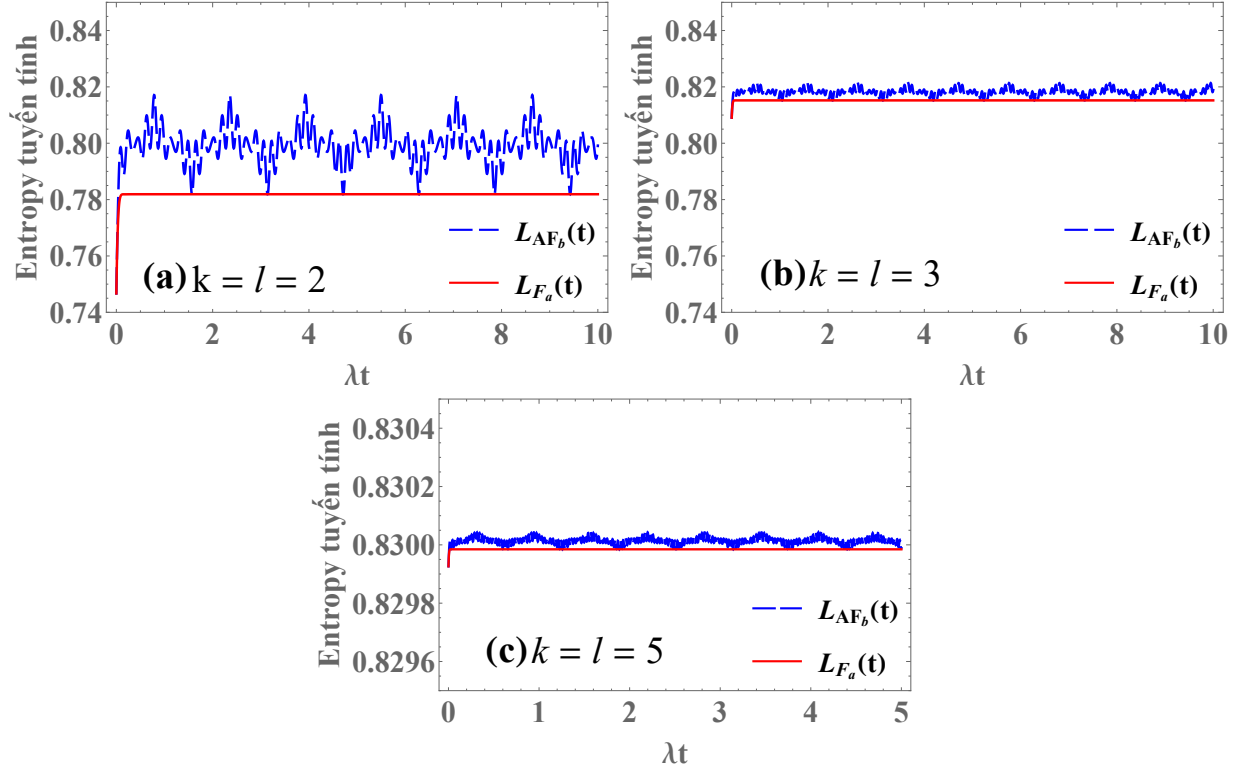


Hình 3.5: Sự phụ thuộc của entropy tuyến tính theo λt với các tham số cố định $k = l = 1$, $|\xi|^2 = 1$, $q = 0$, $\mu_e = \mu_g = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma = 1$, (a) $\gamma = 0$, (b) $\gamma = 0.1$ và (c) $\gamma = 1$.

trong đó $F(\mathcal{C}_{n,n})$ được cho trong biểu thức (3.43) và các hệ số

$$\begin{aligned}
 u_1 &= (b_1 - b_2 + a_2 - a_1)(2n + 2b_1 + 1), \\
 v_1 &= (b_1 - b_2 + a_2 - a_1)(2n + 2b_2 + 1), \\
 u_2 &= (b_1 - b_2 + a_2 - a_1)(2n + 2a_1 + 1), \\
 v_2 &= (b_1 - b_2 + a_2 - a_1)(2n + 2a_2 + 1).
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Khi trường ở PCS ($k = l = 0$) và $q = 0$, từ các biểu thức (3.48) và (3.49) chúng ta thấy rằng $L_{F_a}(t)$ trùng với $L_{AF_b}(t)$ trong đó các số hạng liên quan đến tham số suy giảm pha γ trong các biểu thức trên bị triệt tiêu. $L_{F_a}(t)$ và $L_{AF_b}(t)$ chỉ nhận giá trị cực đại là 0.6 khi trường ở PCS. Để nghiên cứu độ rối trong các hệ con, chúng tôi khảo sát cho trường ở SPAPCS. Hình 3.5 chỉ ra ảnh hưởng của các tham số suy giảm pha lên



Hình 3.6: Sự phụ thuộc của entropy tuyến tính theo λt , $L_{AF_b}(t)$ (đường đứt nét màu xanh) và $L_{F_a}(t)$ (đường liền nét màu đỏ) với $\gamma = 1$, $|\xi|^2 = 1$, $q = 0$, $\mu_e = \mu_g = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma = 1$ trong các trường hợp (a) $k = l = 2$, (b) $k = l = 3$ và (c) $k = l = 5$.

các độ rối giữa một mode của trường (mode a) trong SPAPCS ($k = l = 1$) và phần còn lại của hệ (nguyên tử+mode b) và ngược lại. Đồ thị cho thấy độ rối giữa các thành phần trong hệ không xuất phát từ giá trị 0 mà xuất phát từ một giá trị nhất định, nghĩa là ban đầu hệ đã rối với nhau. Khi bỏ qua hiệu ứng suy giảm pha, $L_{AF_b}(t)$ và $L_{F_a}(t)$ dao động tuần hoàn theo chu kỳ ngay từ lúc bắt đầu và giá trị của $L_{AF_b}(t)$ lớn hơn một ít so với $L_{F_a}(t)$. Khi γ càng tăng, sự dao động của $L_{F_a}(t)$ dần triệt tiêu trong khi $L_{AF_b}(t)$ nhanh đạt đến trạng thái ổn định. Trường hợp $\gamma = 1$, hiện tượng suy giảm pha ảnh hưởng rõ rệt lên độ rối giữa ba thành phần (hình 3.5c), trong đó giá trị của $L_{AF_b}(t)$ dao động tuần hoàn và đạt đến giá trị cực đại xấp xỉ 0.8 trong khi $L_{F_a}(t)$ ngay lập tức đạt giá trị ổn định. Điều này có nghĩa là tham số suy giảm pha ảnh hưởng lên sự rối giữa một mode của trường

SPAPCS với phần còn lại của hệ. Giá trị của γ càng lớn, độ rối $L_{AF_b}(t)$ và $L_{F_a}(t)$ càng tăng [89].

Để thấy được vai trò của việc thêm photon vào hai mode của trường SPAPCS, chúng tôi chỉ ra trong hình 3.6 sự phụ thuộc của $L_{AF_b}(t)$ và $L_{F_a}(t)$ theo λt với số photon khác nhau được thêm vào hai mode của trường SPAPCS trong trường hợp $\gamma = 1$. Các hình từ 3.6(a) đến 3.6(c) chỉ ra rằng độ rối $L_{AF_b}(t)$ và $L_{F_a}(t)$ đều tăng khi càng thêm số photon vào hai mode của trường SPAPCS. Hơn nữa, trong khi giá trị của $L_{AF_b}(t)$ dần tăng và nhận giá trị cực đại lớn hơn 0.83, thì $L_{F_a}(t)$ ngay lập tức đạt giá trị cực đại ổn định. Vì vậy, việc thêm photon vào hai mode của trường SPAPCS không chỉ làm thay đổi chu kì và số dao động của $L_{AF_b}(t)$ mà còn tăng cường độ rối giữa một mode của trường SPAPCS với phần còn lại của hệ.

3.4. Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đã thu được các kết quả sau:

Thứ nhất, đã đề xuất được trạng thái hai mode mới là trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon bằng việc thêm photon không định xứ lên trạng thái kết hợp cặp.

Thứ hai, đã khảo sát các tính chất của trạng thái SPAPCS là tính chất phi Gauss thông qua hàm Wigner và tính chất rối thông qua tiêu chuẩn entropy tuyến tính không phụ thuộc thời gian. Kết quả cho thấy, với các giá trị âm của hàm Wigner trong không gian pha thể hiện tính chất phi cổ điển của trạng thái mới được tăng cường.

Thứ ba, đã nghiên cứu độ rối nguyên tử-trường và độ rối giữa một mode của trường với hệ con gồm nguyên tử+mode còn lại thông qua tiêu chuẩn entropy tuyến tính theo thời gian. Các đồ thị cho thấy độ rối giữa

nguyên tử với hai mode của trường SPAPCS và độ rối giữa một mode của trường với hệ con có sự dao động theo thời gian và bị ảnh hưởng bởi các tham số cường độ trường ban đầu, số photon được thêm vào các mode và hệ số suy giảm pha. Khi không xét đến ảnh hưởng của môi trường thì các tính chất này dao động tuần hoàn theo thời gian, điều này hoàn toàn trùng khớp với các kết quả thu được ở chương 2. Khi xét đến ảnh hưởng của môi trường, γ càng lớn thì sự dao động của entropy tuyến tính càng giảm và đạt đến giới hạn cố định. Giá trị này càng tiến đến 1 nghĩa là độ rối giữa nguyên tử và trường càng lý tưởng và là nguồn rối hữu ích cho quá trình viễn tải lượng tử.

Chương 4

ỨNG DỤNG CỦA CÁC TRẠNG THÁI ĐA MODE VÀO VIỄN TẢI LƯỢNG TỬ

4.1. Mở đầu

Viễn tải lượng tử là phương pháp chuyển một trạng thái chưa biết từ người gửi (Alice) đến người nhận (Bob) cách nhau một khoảng bất kì trong không gian nhờ sử dụng một trạng thái rối được chia sẻ trước đó giữa Alice và Bob kết hợp với một kênh thông tin cổ điển. Trong quá trình viễn tải, mọi thao tác đều do Alice và Bob tự thực hiện lên các trạng thái mà mình đang nắm giữ mà không cần bảo mật [1]. Với một quá trình viễn tải lượng tử lý tưởng, thông tin sẽ được chuyển giao với độ chính xác và bảo mật tuyệt đối. Ý tưởng về viễn tải lượng tử lần đầu tiên đã được Bennet và cộng sự đề xuất vào năm 1993 [90], sau đó nhiều nghiên cứu đã đề xuất các nguồn rối được sử dụng làm kênh rối cho quá trình này. Các nghiên cứu đã thực hiện việc viễn tải trạng thái số hạt hoặc trạng thái kết hợp với nguồn rối là các trạng thái nén dịch chuyển thêm photon hai mode [32], các trạng thái kết hợp cặp thêm và bớt photon hai mode [28], các trạng thái chân không nén hai mode [29] và các nguồn rối khác. Các giao thức được đề xuất để viễn tải trạng thái lượng tử của photon đều thực hiện trong điều kiện lý tưởng, chưa xét đến các tương tác của trường lượng tử với môi trường.

Ngoài ra, một loạt các giao thức khác được đề xuất để viễn tải các trạng thái trường cũng như các trạng thái nguyên tử [88],[91],[92]. Nguồn rối được sử dụng ở đây là hệ nguyên tử-trường trong mô hình JC. Trong chương này, chúng tôi thực hiện viễn tải lượng tử một trạng thái chưa biết

của nguyên tử thông qua kênh rối nguyên tử-trường bằng phương pháp phát hiện. Với kết quả đã chỉ ra trong chương hai, nguồn rối được chúng tôi sử dụng là mô hình nguyên tử-trường với trường ở trạng thái kết hợp cặp thêm photon tổng quát. Đồng thời trong quá trình viễn tải chúng tôi cũng so sánh kết quả độ trung thực trung bình trong hai trường hợp trường ở trạng thái kết hợp cặp và ở trạng thái kết hợp cặp thêm photon.

4.2. Viễn tải lượng tử với trường ở trạng thái kết hợp cặp thêm photon

4.2.1. Kênh lượng tử rối nguyên tử-trường

Để viễn tải một trạng thái nguyên tử từ Alice sang Bob, đầu tiên chúng ta cần tạo ra một kênh lượng tử. Trong mục này, kênh lượng tử được sử dụng là tương tác nguyên tử-trường trong mô hình JC. Mô hình này gồm một nguyên tử hai mức hiệu dụng với trường ở trạng thái GPAPCS. Áp dụng biểu thức (1.48), Hamiltonian của hệ trong gần đúng sóng quay mà không xét đến dịch chuyển Stark có dạng

$$\hat{H} = \omega \hat{S}_z + \omega_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_2 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \lambda \left(\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger |g\rangle \langle e| + \hat{a} \hat{b} |e\rangle \langle g| \right), \quad (4.1)$$

trong đó ω là tần số nguyên tử, ω_i với $i = \{1, 2\}$ là tần số của các mode a và mode b tương ứng của trường, λ là hằng số tương tác hiệu dụng giữa nguyên tử và trường, các toán tử $\hat{a}^\dagger$, $\hat{b}^\dagger$ và $\hat{a}$, $\hat{b}$ là các toán tử sinh và hủy photon các mode a , mode b và $|e\rangle$, $|g\rangle$ là trạng thái kích thích và cơ bản của nguyên tử. Trạng thái kết hợp cặp thêm photon tổng quát được cho trong biểu thức (1.21). Chúng tôi đã tính toán chi tiết các tính chất động học của nguyên tử và trường và đã chỉ ra sự rối giữa chúng theo thời gian [82]. Do đó chúng là một kênh lượng tử phù hợp để thực hiện việc viễn tải lượng tử trạng thái nguyên tử.

4.2.2. Viễn tải trạng thái nguyên tử

Lần đầu tiên Bennet và cộng sự đã đề xuất giản đồ về mặt lý thuyết cho phép thực hiện viễn tải lượng tử [90]. Giản đồ bao gồm ba hạt, trong đó Alice giữ hạt 1 và hạt 2, Bob giữ hạt 3. Hạt 1 giữ trạng thái φ cần được viễn tải, hạt 2 và 3 chính là kênh lượng tử giữa Alice và Bob. Alice sẽ thực hiện phép đo nối lên hạt 1 và 2 còn gọi là phép đo Bell và gửi kết quả đo cho Bob bằng kênh cổ điển. Dựa trên kết quả đo này, Bob thực hiện phép đo lên hạt 3 để tái cấu trúc hạt 3 sao cho trạng thái nhận được chính là trạng thái φ . Sự thành công của quá trình viễn tải này được đánh giá thông qua tiêu chuẩn độ trung thực trung bình. Bouwmeester và cộng sự đã chứng minh tính đúng đắn của giản đồ Bennet bằng thực nghiệm thông qua việc sử dụng cặp photon làm nguồn rối lượng tử để viễn tải trạng thái phân cực của một photon bất kì [93]. Kể từ đó đã có nhiều giản đồ được đề xuất để viễn tải các trạng thái của nguyên tử hoặc trường hoặc ion mà các kênh lượng tử được đề xuất là các cặp nguyên tử rối, hoặc cặp rối giữa phonon với ion hoặc cặp rối giữa nguyên tử với trường [91],[92],[94].

Trong quá trình viễn tải lượng tử một trạng thái lượng tử của hạt 1 bất kì chưa biết từ Alice đến Bob, chúng ta cần tạo kênh lượng tử rối là cặp hạt 2 và 3. Về mặt toán học trạng thái của cặp hạt này có thể được biểu diễn qua bốn trạng thái Bell là trạng thái chồng chập của chúng, còn gọi là hệ cơ sở trực giao Bell. Tiếp theo Alice thực hiện phép đo nối giữa hạt 1 và hạt 2 trong hệ cơ sở Bell và gửi kết quả đo thông qua kênh cổ điển đến Bob. Bob thực hiện phép biến đổi Unitary tương ứng với kết quả nhận được để khôi phục lại trạng thái của hạt 1 ban đầu. Phương pháp này chính là phép đo trạng thái Bell [1]. Phương pháp này được sử dụng để viễn tải trạng thái lượng tử của một photon với nguồn rối là các trường phi cổ điển. Tuy nhiên khi viễn tải trạng thái lượng tử của một nguyên tử

bất kì, để sử dụng được phép đo Bell cần thực hiện với các giản đồ phức tạp khó khả thi trong thực nghiệm [95].

Zheng và cộng sự vào năm 1999 đã đề xuất một phương pháp khác đơn giản hơn để viễn tải trạng thái nguyên tử bất kì, đó là phương pháp phát hiện (detecting method) [96]. Kể từ đó, một loạt các nghiên cứu với các nguồn rối khác nhau đã sử dụng phương pháp phát hiện này và đã chỉ ra sự thành công trong quá trình viễn tải lượng tử [92],[94],[95],[97]. Trong phương pháp phát hiện, Alice giữ qubit của nguyên tử 1 là một trạng thái bất kì cần được viễn tải và trường lượng tử, còn Bob giữ qubit nguyên tử 2. Qubit của nguyên tử 2 và trường lượng tử là kênh rối lượng tử được tạo ra thông qua tương tác nguyên tử-trường trong mô hình JC. Thay vì phải thực hiện phép đo trạng thái Bell phức tạp giữa hệ chồng chập hai qubit này, chúng ta sử dụng máy dò (detector) để phát hiện xem khi nào nguyên tử 1 từ trạng thái ban đầu về trạng thái kích thích. Lúc này hệ chồng chập 3 qubit sẽ sụp đổ về trạng thái mà qubit của nguyên tử 2 có trạng thái giống với qubit 1 ban đầu [97].

Trong mục này, chúng tôi sử dụng phương pháp phát hiện [92] với giản đồ [97] để viễn tải một trạng thái nguyên tử chưa biết. Giả sử trạng thái của nguyên tử 1 là trạng thái nguyên tử đầu vào cần được viễn tải có dạng

$$|\varphi\rangle_{in} = |\varphi_A\rangle_1 = \mu|e\rangle_1 + \nu|g\rangle_1, \quad (4.2)$$

trong đó các hệ số μ và ν là các biên độ của trạng thái được viễn tải thỏa mãn điều kiện $|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1$. Nguyên tử 2 ban đầu được chuẩn bị ở trạng thái

$$|\varphi_A\rangle_2 = |e\rangle_2. \quad (4.3)$$

Nguyên tử này tương tác với trường ở GPAPCS thông qua mô hình JC để tạo ra kênh rối lượng tử nguyên tử-trường.

Tại thời điểm ban đầu, trạng thái của hệ bao gồm nguyên tử 2 và trường GPAPCS có dạng như sau:

$$|\psi_{A_2F}(0)\rangle = |\varphi_A\rangle_2 \otimes |F\rangle = \mathcal{C}_{q;m,k} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_n |e, n+q+m, n+k\rangle_2, \quad (4.4)$$

trong đó $\mathcal{C}_{q;m,k}$ được cho trong biểu thức (1.22) và $|F\rangle$ là trạng thái kết hợp cặp thêm photon tổng quát được cho trong biểu thức (1.21). Trạng thái của hệ sau thời gian tương tác t_1 có dạng

$$\begin{aligned} |\psi_{A_2F}(t_1)\rangle &= \hat{U}(n, t_1) |\psi_{A_2F}(0)\rangle = e^{-i\hat{H}t_1} |\psi_{A_2F}(0)\rangle \\ &= \mathcal{C}_{q;m,k} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_n [\cos(\lambda\beta_n t_1) |e, n+q+m, n+k\rangle_2 \\ &\quad -i \sin(\lambda\beta_n t_1) |g, n+q+m+1, n+k+1\rangle_2], \end{aligned} \quad (4.5)$$

trong đó toán tử tiến hóa theo thời gian $\hat{U}(n, t_1)$ và β_n được cho trong các biểu thức (2.7) và (2.4).

Sau khi nguyên tử 2 và trường GPAPCS đã rời với nhau, hệ nguyên tử-trường trở thành kênh lượng tử, trong đó Alice giữ qubit của trường và Bob giữ qubit của nguyên tử 2. Bây giờ toàn bộ hệ bao gồm nguyên tử 1 cần được viễn tải và hệ con là kênh lượng tử nguyên tử-trường được mô tả bằng vectơ trạng thái sau:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\varphi_A\rangle_1 \otimes |\psi_{A_2F}(t_1)\rangle \\ &= (\mu|e\rangle_1 + \nu|g\rangle_1) \mathcal{C}_{q;m,k} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_n [\cos(\lambda\beta_n t_1) |e, n+q+m, n+k\rangle_2 \\ &\quad -i \sin(\lambda\beta_n t_1) |g, n+q+m+1, n+k+1\rangle_2], \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sau thời gian t_2 nguyên tử 1 tương tác với trường và vectơ trạng thái của hệ toàn phần có dạng

$$|\psi'\rangle = \mathcal{C}_{q;m,k} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_n \left\{ \mu \cos(\lambda\beta_n t_1) \left[\cos(\lambda\beta_n t_2) |e, e, n+q+m, n+k\rangle_{1,2} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -i \sin(\lambda\beta_n t_2) |g, e, n + q + m + 1, n + k + 1\rangle_{1,2} \Big] \\
& - i\mu \sin(\lambda\beta_n t_1) \Big[\cos(\lambda\beta_{n+1} t_2) |e, g, n + q + m + 1, n + k + 1\rangle_{1,2} \\
& -i \sin(\lambda\beta_{n+1} t_2) |g, g, n + q + m + 2, n + k + 2\rangle_{1,2} \Big] \\
& + \nu \cos(\lambda\beta_n t_1) |g, e, n + q + m, n + k\rangle_{1,2} \\
& - i\nu \sin(\lambda\beta_n t_1) \Big[\cos(\lambda\beta_n t_2) |g, g, n + q + m + 1, n + k + 1\rangle_{1,2} \\
& -i \sin(\lambda\beta_n t_2) |e, g, n + q + m, n + k\rangle_{1,2} \Big] \Big\}. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Khi Alice phát hiện ra nguyên tử 1 ở trạng thái kích thích $|e\rangle_1$, thì hệ con gồm nguyên tử 2 và trường bị sụp đổ về trạng thái

$$\begin{aligned}
|\Phi\rangle &= \mathcal{N} C_{q;m,k} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_n \{ \mu \text{Cos}(\lambda\beta_n t_1) \text{Cos}(\lambda\beta_n t_2) |e, n + q + m, n + k\rangle_2 \\
& - i\mu \text{Sin}(\lambda\beta_n t_1) \text{Cos}(\lambda\beta_{n+1} t_2) |g, n + q + m + 1, n + k + 1\rangle_2 \\
& - \nu \text{Sin}(\lambda\beta_n t_1) \text{Sin}(\lambda\beta_n t_2) |g, n + q + m, n + k\rangle_2 \} \\
&= \mathcal{N} C_{q;m,k} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_n [\gamma |e, n + q + m, n + k\rangle_2 \\
& + i\chi |g, n + q + m + 1, n + k + 1\rangle_2 + \eta |g, n + q + m, n + k\rangle_2], \tag{4.8}
\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\gamma &= \mu \text{Cos}(\lambda\beta_n t_1) \text{Cos}(\lambda\beta_n t_2), \\
\chi &= -\mu \text{Sin}(\lambda\beta_n t_1) \text{Cos}(\lambda\beta_{n+1} t_2), \\
\eta &= -\nu \text{Sin}(\lambda\beta_n t_1) \text{Sin}(\lambda\beta_n t_2),
\end{aligned} \tag{4.9}$$

và hệ số chuẩn hóa có dạng

$$\mathcal{N} = \left[|C_{q;m,k}|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{R}_n|^2 \left(|\gamma|^2 + |\chi|^2 + |\eta|^2 \right) \right]^{-1/2}. \tag{4.10}$$

Trạng thái Φ được xác định trong biểu thức (4.8), bao gồm tổ hợp giữa trạng thái của trường và trạng thái của nguyên tử 2 sau thời gian tương

tác t_1 và t_2 . Trạng thái của nguyên tử 2 mà Bob đang nắm giữ lúc này chính là trạng thái đầu ra. Nếu trạng thái đầu ra có dạng

$$|\varphi\rangle_{out} = \mu|e\rangle_2 + \nu|g\rangle_2, \quad (4.11)$$

nghĩa là quá trình viễn tải đã thành công. Để so sánh sự sai khác giữa trạng thái đầu vào và trạng thái đầu ra, cũng như đánh giá các yếu tố ảnh hưởng đến quá trình viễn tải, chúng tôi sử dụng biểu thức độ trung thực trung bình F của trạng thái được viễn tải được xác định bởi [97]

$$F = |\langle \Phi | \varphi_{out} \rangle|^2. \quad (4.12)$$

Áp dụng các biểu thức (4.8) và (4.11) vào biểu thức (4.12), chúng ta thu được kết quả độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải một trạng thái nguyên tử chưa biết từ Alice sang Bob với kênh rỗng là kênh nguyên tử-trường

$$\begin{aligned} F &= |\mathcal{N}|^2 |\mathcal{C}_{q;m,k}|^2 \sum_{n,n'=0}^{\infty} \mathcal{R}_n^* \mathcal{R}_{n'} \left[(\gamma^* \mu + \eta^* \nu) \langle n+q+m, n+k | \right. \\ &\quad \left. - i\chi^* \nu \langle n+q+m+1, n+k+1 | \right] \\ &\quad \times \left[(\gamma \mu^* + \eta \nu^*) |n'+q+m, n'+k\rangle \right. \\ &\quad \left. + i\chi \nu^* |n'+q+m+1, n'+k+1\rangle \right] \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{R}_n|^2 \left(|\gamma^* \mu + \eta^* \nu|^2 + |\chi^* \nu|^2 \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{R}_n|^2 \left(|\gamma|^2 + |\chi|^2 + |\eta|^2 \right)}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

trong đó $\mathcal{R}_n$ được cho trong các biểu thức (1.23) và các hệ số γ , χ và η được cho trong biểu thức (4.9). Xác suất P của việc đo trạng thái nguyên tử $|e\rangle_1$ được cho bởi

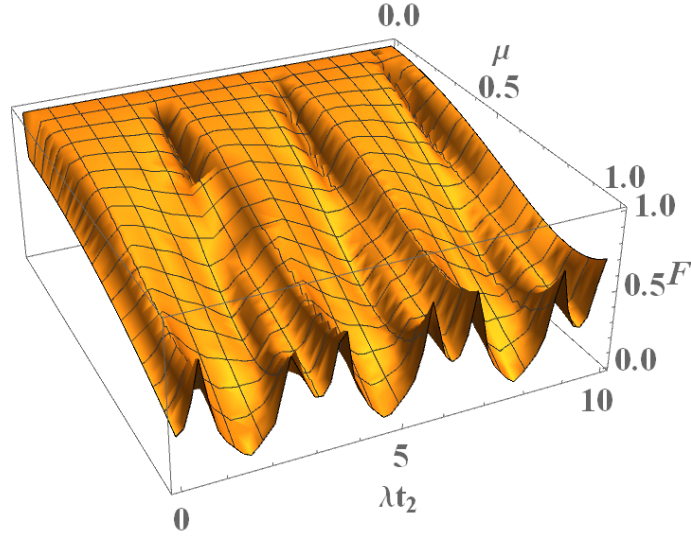
$$P = \frac{1}{\mathcal{N}^2} = |\mathcal{C}_{q;m,k}|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{R}_n|^2 \left(|\gamma|^2 + |\chi|^2 + |\eta|^2 \right). \quad (4.14)$$

Độ trung thực trung bình F chỉ ra sự sai khác giữa trạng thái đầu vào và trạng thái đầu ra. Giá trị của F bằng một đơn vị khi trạng thái đầu ra hoàn toàn trùng khớp với trạng thái đầu vào. Để viễn tải các trạng thái lượng tử tốt hơn cổ điển, giá trị của độ trung thực trung bình phải lớn hơn $2/3$ [98]. Các kết quả tính số của độ trung thực trung bình được thảo luận trong mục tiếp theo. Trong đó chúng tôi sẽ chỉ ra ảnh hưởng của các tham số như cường độ trường ban đầu, biên độ của trạng thái được viễn tải và sự thêm photon vào các mode của trường lên quá trình viễn tải.

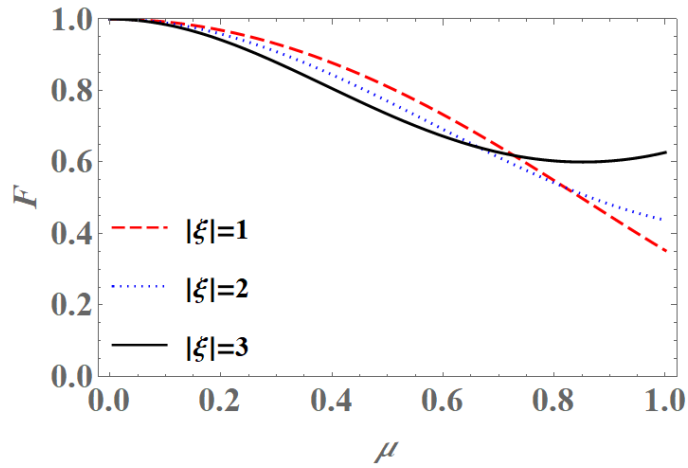
4.3. Kết quả tính số và thảo luận

Hình 4.1 được vẽ cho độ trung thực trung bình F trong biểu thức (4.13), đây là một hàm theo thời gian λt_2 và biên độ μ của trạng thái được viễn tải. Các giá trị được chọn tương ứng với các điều kiện được khảo sát sao cho độ rối nguyên tử-trường là cực đại [82]. Đối với thời gian tương tác λt_1 để tạo ra kênh lượng tử rối ban đầu, chúng tôi chọn giá trị tương ứng là $\lambda t_1 = \frac{3\pi}{4}$, giá trị này đã được khảo sát và chỉ ra rằng với sự tuần hoàn theo chu kì thì nguyên tử và trường đạt rối cực đại. Hình 4.1 được vẽ trong trường hợp trường ở trạng thái kết hợp cặp ($m = k = 0$) và không có sự chênh lệch số photon giữa hai mode của trường $q = 0$.

Hình 4.1 cho thấy rằng độ trung thực trung bình F dao động tuần hoàn theo thời gian, điều này cũng tương ứng với các tính chất động học của trường khi nguyên tử tương tác với trường trong mô hình JC hai mode [82]. Ngoài ra, F cũng phụ thuộc vào tham số μ với các giá trị nằm trong khoảng từ 0 đến 1. Giá trị của F giảm dần khi μ tăng. Đồ thị 4.1 cũng chỉ ra các giá trị của λt_2 tương ứng với các giá trị cực đại của F , do đó chúng tôi sử dụng các giá trị này để khảo sát tiếp trong các hình dưới đây.



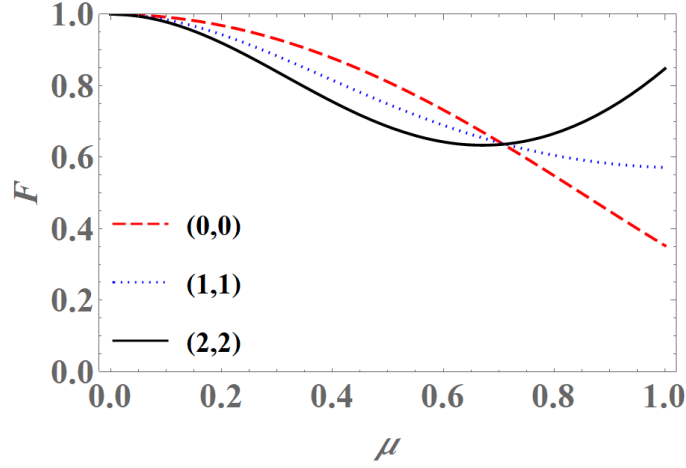
Hình 4.1: Sự phụ thuộc của F theo λt_2 và μ với $\lambda t_1 = \frac{3\pi}{4}$, $|\xi| = 1$, $q = m = k = 0$.



Hình 4.2: Sự phụ thuộc của F theo μ với các tham số cố định $\lambda t_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\lambda t_2 = \frac{5\pi}{4}$, $q = m = k = 0$ cho các trường hợp $|\xi| = 1$ (đường đỏ), $|\xi| = 2$ (đường chấm chấm màu xanh) và $|\xi| = 3$ (đường liền nét màu đen).

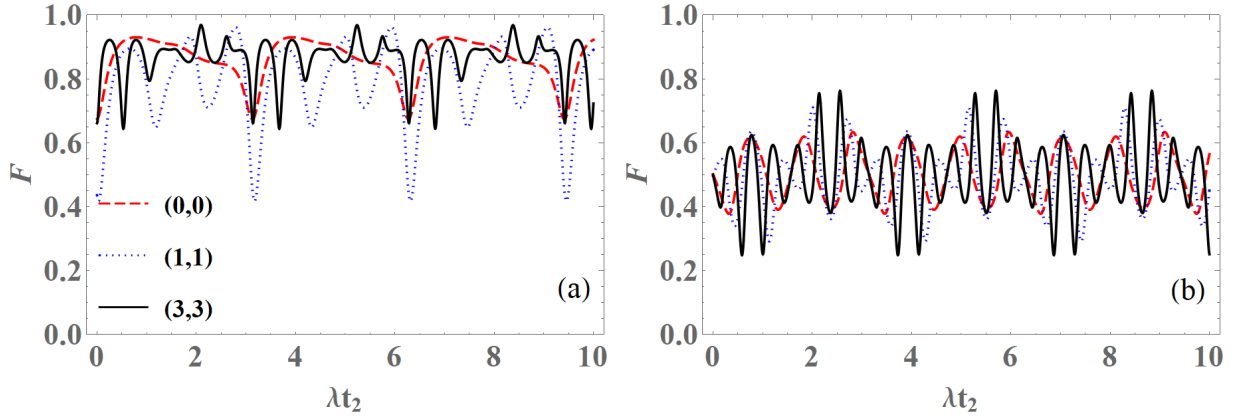
Hình 4.2 mô tả sự phụ thuộc của F theo μ cho trường ở trạng thái kết hợp cặp với các điều kiện $\lambda t_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\lambda t_2 = \frac{5\pi}{4}$, $q = m = k = 0$ và $|\xi| = \{1, 2, 3\}$. Từ đồ thị, chúng tôi thấy rằng giá trị của μ chia ra hai miền, trong đó khi $0 < \mu < 0.7$ giá trị của F giảm khi $|\xi|$ tăng, còn khi $0.7 < \mu < 1$ thì giá trị của F tăng khi $|\xi|$ tăng, khi $\mu = 1$ giá trị của $F = \{0.35, 0.45, 0.65\}$ tương ứng với $|\xi| = \{1, 2, 3\}$. Nghĩa là khi xét kênh

lượng tử nguyên tử-trường với trường ở PCS, nếu biên độ của trạng thái cần viễn tải trong khoảng từ 0 đến 0.7 để độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải cao nên chọn cường độ trường ban đầu bé, và khi μ thuộc khoảng từ 0.7 đến 1 để trạng thái đầu ra gần giống với trạng thái đầu vào nên chọn cường độ trường ban đầu lớn.



Hình 4.3: Sự phụ thuộc của F theo μ với các tham số cố định $\lambda t_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\lambda t_2 = \frac{5\pi}{4}$, $|\xi| = 1$, $q = 0$ cho các trường hợp (m, k) bằng $(0, 0)$ (đường đứt nét màu đỏ), $(1, 1)$ (đường chấm chấm màu xanh), và $(2, 2)$ (đường liền nét màu đen).

Hình 4.3 mô tả sự phụ thuộc của F theo μ và số photon được thêm vào hai mode của trường ở trạng thái kết hợp cặp thêm photon với các tham số $\lambda t_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\lambda t_2 = \frac{5\pi}{4}$, $q = 0$ và $|\xi| = 1$. Đồ thị hình 4.3 cũng cho thấy khi μ trong miền $0 < \mu < 0.7$ giá trị của F giảm khi thêm photon vào các mode của trường GPAPCS. Tuy nhiên khi μ trong miền $0.7 < \mu < 1$ giá trị cực đại của F được cải thiện đáng kể khi càng thêm photon vào hai mode của trường GPAPCS (đường chấm chấm màu xanh và đường liền nét màu đen). Khi thêm đồng thời $\{1, 2\}$ photon vào hai mode của trường thì giá trị của F tương ứng đạt $\{0.55, 0.85\}$. Điều này chứng tỏ rằng việc thêm photon vào hai mode của trường GPAPCS làm tăng độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải khi biên độ trạng thái viễn tải trong khoảng $0.7 < \mu < 1$ [99].



Hình 4.4: Sự phụ thuộc của F theo λt_2 với $\lambda t_1 = \frac{3\pi}{4}$ trong các trường hợp (a) $|\xi| = 1, \mu = 0.3$ và (b) $|\xi| = 2, \mu = 0.7$.

Hình 4.4 mô tả sự phụ thuộc của F theo λt_2 với $\lambda t_1 = \frac{3\pi}{4}$ trong hai trường hợp trường ở PCS $m = k = 0$ (đường đứt nét màu đỏ) và trường ở GPAPCS $m = k = 1$ (đường chấm chấm màu xanh), $m = k = 3$ (đường liền nét màu đen). Trong cả hai đồ thị ở hình 4.4(a) và hình 4.4(b), chúng ta đều thấy sự dao động tuần hoàn theo thời gian của F trong cả hai trường hợp PCS và GPAPCS. Trong miền $0 < \mu < 0.7$ (hình 4.4a) khi thêm photon vào hai mode của trường giá trị cực đại của F tăng đáng kể. Giá trị cực đại của F đạt xấp xỉ trên 0.95 khi thêm đồng thời 3 photon vào hai mode của trường GPAPCS, trong khi giá trị này chỉ đạt xấp xỉ trên 0.9 cho trường PCS. Trong miền $0.7 < \mu < 1$ (hình 4.4b), giá trị của F nhỏ hơn trong miền $0 < \mu < 0.7$, khi thêm đồng thời 3 photon vào hai mode của trường GPAPCS thì giá trị cực đại của F đạt 0.7 trong khi trường ở PCS giá trị này chỉ đạt xấp xỉ 0.6. Do đó trong miền $0.7 < \mu < 1$ để cải thiện độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải chúng tôi không chỉ tăng cường độ trường ban đầu mà còn thêm đồng thời số photon vào hai mode của trường.

4.4. Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đã thu được các kết quả sau:

Thứ nhất, đã đưa ra kênh lượng tử rời nguyên tử-trường trong mô hình JC với trường ở trạng thái GPAPCS để thực hiện viễn tải lượng tử trạng thái nguyên tử chưa biết từ Alice sang Bob. Phương pháp được sử dụng trong quá trình viễn tải là phương pháp phát hiện.

Thứ hai đã thực hiện thành công quá trình viễn tải với các kết quả được đánh giá qua độ trung thực trung bình F . Kết quả cho thấy độ trung thực trung bình của quá trình viễn tải dao động tuần hoàn theo thời gian. Đồng thời độ trung thực trung bình còn phụ thuộc vào bộ tham số (m, k) , cường độ trường ban đầu $|\xi|$ và biên độ của trạng thái được viễn tải μ . Giá trị của độ trung thực trung bình trong trường hợp $0.7 < \mu < 1$ luôn nhỏ hơn trường hợp μ thuộc miền còn lại. Để cải thiện độ trung thực trung bình trong vùng $0.7 < \mu < 1$, các kết quả khảo sát đã chỉ ra vai trò của việc thêm photon vào hai mode của trường. Trường hợp biên độ của trạng thái viễn tải trong miền $0 < \mu < 0.7$, khi thêm photon vào hai mode của trường cũng như tăng cường độ trường ban đầu sẽ cải thiện đáng kể giá trị của F . Do đó, chúng tôi kết luận rằng việc viễn tải một trạng thái nguyên tử chưa biết bằng nguồn rời nguyên tử-trường với trường ở GPAPCS sẽ tốt hơn ở PCS.

KẾT LUẬN CHUNG

Luận án đã nghiên cứu về các tính chất, đặc biệt nhấn mạnh vào tính chất động lượng tử của một vài trạng thái thêm photon vào hai mode hoặc ba mode của trạng thái gốc là trạng thái kết cặp hoặc trạng thái kết hợp bộ ba thông qua mô hình JC. Qua đó, ứng dụng chúng vào các giao thức để viễn tải lượng tử. Qua quá trình nghiên cứu, luận án đã thu được các kết quả mới như sau:

Thứ nhất, chúng tôi đã đưa ra được trạng thái phi cổ điển hai mode mới đó là trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon và nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của chúng thông qua hàm Wigner và entropy tuyến tính. Kết quả cho thấy trạng thái này là một trạng thái phi cổ điển phi Gauss và có độ rối mạnh.

Thứ hai, chúng tôi đã nghiên cứu các tính chất động lượng tử của tương tác nguyên tử-trường khi không xét đến ảnh hưởng của hệ số suy giảm γ của môi trường, trong đó trường ở trạng thái kết hợp cặp thêm photon và trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon. Kết quả khảo sát cho thấy trong cả hai trường hợp, sự tuần hoàn theo thời gian thể hiện qua tần số dao động Rabi của nguyên tử trong quá trình tương tác nguyên tử-trường. Các tính chất động học của nguyên tử và các quá trình động lượng tử của trường đều bị ảnh hưởng bởi các tham số cường độ trường ban đầu và số photon được thêm vào các mode của trường. Với điều kiện số photon thêm vào các mode của trường là như nhau thì các tính chất và các quá trình động đều thay đổi theo chiều hướng cải thiện hơn, đặc biệt là độ rối cao hơn.

Thứ ba, chúng tôi đã nghiên cứu các tính chất động lượng tử của tương tác nguyên tử-trường có xét đến ảnh hưởng của hệ số suy giảm γ

của môi trường, trong đó trường ở trạng thái kết hợp cặp chồng chất thêm photon. Kết quả khảo sát cho thấy độ rối giữa nguyên tử với hai mode của trường và độ rối giữa một mode của trường với hệ con gồm nguyên tử và mode còn lại có sự dao động theo thời gian và bị ảnh hưởng bởi các tham số cường độ trường ban đầu, số photon được thêm vào các mode và hệ số suy giảm của môi trường γ . Hệ số suy giảm γ càng lớn thì độ rối giữa nguyên tử và trường càng lớn và đạt đến độ rối cực đại khi γ tiến đến giá trị lớn nhất.

Thứ tư, chúng tôi đã nghiên cứu quá trình viễn tải lượng tử một trạng thái nguyên tử chưa biết với trường ở trạng thái kết hợp cặp thêm photon. Kết quả khảo sát đã chỉ ra được sự thành công của quá trình viễn tải lượng tử với nguồn rối là trạng thái kết hợp cặp thêm photon thông qua kênh viễn tải nguyên tử-trường. Các kết quả cho thấy việc viễn tải một trạng thái nguyên tử chưa biết bằng nguồn rối nguyên tử-trường với trường ở GPAPCS sẽ tốt hơn ở PCS và quá trình viễn tải này phụ thuộc vào cường độ trường ban đầu, biên độ của trạng thái cần viễn tải và số photon được thêm vào hai mode của trường.

Như vậy, các kết quả đạt được cho thấy chúng tôi đã hoàn thành tất cả các mục tiêu đã đề ra trong luận án. Luận án có thể được tiếp tục nghiên cứu và mở rộng theo hai hướng chính, đó là tiếp tục đề xuất các trạng thái phi cổ điển mới, nghiên cứu các tính chất của chúng, và nghiên cứu các tính chất động lượng tử của tương tác nguyên tử-trường có xét đến và không xét đến ảnh hưởng của môi trường thông qua các mô hình JC mở rộng có kể đến hiệu ứng Stark, trong đó trường ở các trạng thái phi cổ điển mới.

Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến các kết quả nghiên cứu của luận án

1. **Le Thi Hong Thanh** and Truong Minh Duc (2022). Dynamical properties of the field in generalized photon-added pair coherent state in the Jaynes-Cummings model. *International Journal of Theoretical Physics*, **61** (129), 1-13.
2. **Lê Thị Hồng Thanh** và Trương Minh Đức (2022). Các tính chất động lượng tử của trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon trong mô hình Jaynes-Cummings hai mode. *Tạp chí Khoa học Đại học Huế: Khoa học Tự nhiên*, **131** (1C), 1-13.
3. **Le Thi Hong Thanh**, Phan Ngoc Duy Tinh and Truong Minh Duc (2022). Quantum teleportation of entangled states via generalized photon-added pair coherent state. *DaLat University Journal of Science (Accepted)*.
4. Phan Thị Tâm, Trương Minh Đức và **Lê Thị Hồng Thanh** (2019). Các tính chất phi cổ điển của trạng thái hai mode kết hợp SU(1,1) thêm một và bớt một photon lẻ. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế*, **3** (51), 82-91.
5. **Lê Thị Hồng Thanh** và Trương Minh Đức (2022). Quá trình viễn tải lượng tử qua kênh rối lượng tử nguyên tử-trường với nguồn rối là trạng thái kết hợp cặp thêm photon tổng quát. *Kỷ yếu Hội nghị Vật lý Thừa Thiên Huế 2022*, Thừa Thiên Huế ngày 13/11/2022, Trường Đại học Khoa Học, Đại học Huế, 109-119.

Tài liệu tham khảo

1. Nielsen M.A., and Chuang I.L (2010). *Quantum computation and quantum information*. Cambrigde University Press, New York.
2. Pirandola S., Eisert J., Weedbrook C. et al. (2015). Advances in quantum teleportation. *Nature Photon.*, **9**, 641–652.
3. Einstein A., Podolsky B., and Rosen N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. *Phys. Rev.*, **47** (10), 777-780.
4. Manin Yu.I. (1980). Vychislimoe i Nevychislimoe (Computable and noncomputable) (tiếng Nga). *Moscow: Sov. Radio*, 13-15.
5. Feynman R.P. (1982). Simulating physics with computers. *Int. J. Theor. Phys.*, **21** (6), 467-488.
6. Zhao Z., Chen YA., Zhang A.N. et al. (2004). Experimental demonstration of five-photon entanglement and open-destination teleportation. *Nature*, **430**, 54-58.
7. Ma X.S., Herbst T., Scheidl T. et al. (2012). Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward. *Nature*, **489**, 269-273.
8. Hou, PY., Huang, YY., Yuan, XX. et al. (2016). Quantum teleportation from light beams to vibrational states of a macroscopic diamond. *Nat. Commun.*, **7**, 11736(1-7).
9. Andersen U., Neergaard-Nielsen J., van Loock P. et al. (2015). Hybrid discrete- and continuous-variable quantum information. *Nat. Phys.*, **11**, 713-719.

10. Braunstein S.L., and Kimble H.J. (2000). Dense coding for continuous variables. *Phys. Rev. A*, **61**, 042302(1-4).
11. Ralph. T.C. (1999). Continuous variable quantum cryptography. *Phys. Rev. A*, **61**, 010303(1-4).
12. Braunstein S.L. (1998). Quantum information with continuous variables, Springer, Dordrecht.
13. Navascués M., and Acín A. (2005). Security bounds for continuous variables quantum key distribution. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 020505 (1-4).
14. An N. B., and Kim J. (2008). Joint remote state preparation. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **41**, 095501(1-6).
15. An N.B. (2004), Quantum dialogue, *Phys. Lett. A*, **328**, 6-10.
16. Braunstein S.L., and Looock P.V. (2000). Quantum information with continuous variables. *Rev. Mod. Phys.*, **77**, 513-577.
17. Caves C.M., and Schumaker B.L. (1985). Formalism for two-photon quantum optics. I. Quadrature phases and squeezed states. *Phys. Rev. A*, **31**, 3068-3093.
18. Agarwal G.S. (1988). Nonclassical statistics of fields in pair coherent states. *J. Opt. Soc. Am. B*, **5**, 1940-1947.
19. Duc T.M., Hoai N.T.X., and An N.B. (2014). Sum Squeezing, Difference Squeezing, Higher-Order Antibunching and Entanglement of Two-Mode Photon-Added Displaced Squeezed States. *Int. J. Theor. Phys.*, **53**, 899-910.
20. Schnabel R. (2017). Squeezed states of light and their applications in laser interferometers. *Phys. Reps.*, **684**, 1-51.

21. Clark J.B., Lecocq F. et al. (2016). Observation of strong radiation pressure forces from squeezed light on a mechanical oscillator. *Nat. Phys.*, **12**, 683-687.
22. Duc T.M., Dinh D.H., and Dat T.Q. (2020). Higher-order nonclassical properties of nonlinear charge pair cat states. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **53**, 025402(1-11).
23. Hong L., and Guang-can G. (1999). Nonclassical properties of photon-added pair coherent states. *Acta Phys. Sin. (Overseas Edn)*, **8**, 577-582.
24. Hu L. Y., and Zhang Z. M. (2013). Statistical properties of coherent photon-added two-mode squeezed vacuum and its inseparability. *J. Opt. Soc. Am. B*, **30**, 518-529.
25. Opatrný T., Kurizki G., and Welsch D.G. (2000). Improvement on teleportation of continuous variables by photon subtraction via conditional measurement. *Phys. Rev. A*, **61**, 032302(1-7).
26. Olivares S., Paris M.G.A., and Bonifacio R. (2003). Teleportation improvement by inconclusive photon subtraction. *Phys. Rev. A*, **67**, 032314(1-5).
27. Chunqing H., and Hong L. (2000). Statistical properties of photon-added and photon-subtracted pair coherent state. *Acta Photonica Sinica*, **29**, 481-486.
28. Duc T.M., Chuong H.S., and Dat T.Q. (2021). Detecting nonclassicality and non-Gaussianity by the Wigner function and quantum teleportation in photon-added-and-subtracted two modes pair coherent state. *J. Comput. Electron.*, **20**, 2124-2134.

29. Dat T.Q, and Duc T.M. (2022). Entanglement, nonlocal features, quantum teleportation of two-mode squeezed vacuum states with superposition of photon-pair addition and subtraction operations. *Optik*, **257**, 168744.
30. Duc T.M., Dat T.Q., and Chuong H.S. (2020). Quantum entanglement and teleportation in superposition of multiple-photon-added two-mode squeezed vacuum state. *Int. J. Mod. Phys. B*, **34**, 2050223(1-9).
31. Wang S., Hou L.L. et al. (2015). Continuous-variable quantum teleportation with non-Gaussian entangled states generated via multiple-photon subtraction and addition. *Phys. Rev. A*, **91**, 063832(1-12).
32. Hoai N.T.X., and Duc T.M. (2016). Nonclassical properties and teleportation in the two-mode photon-added displaced squeezed states. *Int. J. Mod. Phys. B*, **30**, 1650032 (1-15).
33. An N.B., and Duc T.M. (2002). Trio coherent state. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **4**, 80-85.
34. Duc T.M., and Dat T.Q. (2020). Enhancing nonclassical and entanglement properties of trio coherent states by photon-addition. *Optik*, **210**, 164479 (1-11).
35. Dat T.Q., and Duc T.M. (2020). Nonclassical properties of the superposition of three-mode photon-added trio coherent state. *Int. J. Theor. Phys.*, **59**, 3206-3216.
36. Jaynes E.T., and Cummings F.W. (1963). Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theory with Application to the Beam Maser. *Proc. IEEE.*, **51**, 89-109.

37. Gerry C.C., and Welch R.F. (1992). Dynamics of a two-mode two-photon Jaynes–Cummings model interacting with correlated $SU(1, 1)$ coherent states. *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 290-297.
38. Gou S.C. (1989). Quantum behavior of a two-level atom interacting with two modes of light in a cavity. *Phys. Rev. A*, **40**, 5116-5128.
39. Gou S.C. (1990). Dynamics of the two-mode Jaynes-Cummings model modified by Stark shifts. *Phys. Lett. A*, **147**, 218-222.
40. Gou S.C. (1990). Time Evolution of a Two-mode Jaynes-Cummings Model in the Presence of Pair-coherent States. *J. Mod. Opt.*, **37**, 1469-1486.
41. Singh S. (1982). Field statistics in some generalized Jaynes-Cummings models. *Phys. Rev. A*, **25**, 3206-3216.
42. Sukumar C.V., and Buck B. (1981). Multi-photon generalisation of the JaynesCummings model. *Phys. Lett. A*, **83**, 221.
43. Puri R.R., and Agarwal G.S. (1988). Coherent two-photon transitions in Rydberg atoms in a cavity with finite Q . *Phys. Rev. A*, **37**, 3879-3883.
44. Puri R.R., and Bullough R.K. (1988). Quantum electrodynamics of an atom making two-photon transitions in an ideal cavity. *J. Opt. Soc. Am. B*, **5**, 2021-2028.
45. Gantsog T.S., and Tanas R. (1991). Phase properties of pair coherent states. *Opt. Commun.*, **82**, 145-152.
46. Gou S.C. (1993). Characteristic oscillations of phase properties for pair coherent states in the two-mode Jaynes-Cummings-model dynamics. *Phys. Rev. A* **48**, 3233-3241.

47. Joshi A., and Puri R.R. (1987). Effects of the Binomial Field Distribution on Collapse and Revival Phenomena in the Jaynes-Cummings Model. *J. Mod. Opt.*, **34**, 1421-1431.
48. Joshi A., and Lawande S.V. (1989). The effects of negative binomial field distribution on Rabi oscillations in a two-level atom. *Opt. Commun.*, **70**, 21-24.
49. Joshi A., and Puri R.R. (1990). Effects of atomic coherence on a rydberg atom undergoing a two-photon transition in a lossless cavity. *Opt. Commun.* **75**, 189-196.
50. Joshi A., and Puri R.R. (1990). Characteristics of Rabi oscillations in the two-mode squeezed state of the field. *Phys. Rev. A* **42**, 4336-4342.
51. Puri R.R., and Agarwal G.S. (1988). Coherent two-photon transitions in Rydberg atoms in a cavity with finite Q. *Phys. Rev. A*, **37**, 3879-3883.
52. Duc T.M., and Nha. D.H. (2004). Dynamical properties of the trio coherent states in the two-mode Jaynes-Cummings-model. *Proceedings of the Ninth Asia Pacific Physics Conference*, Hanoi, Vietnam, October, 25-31.
53. An N.B. (2005). Dynamics of the field in trio coherent states interacting with an atom via multi-photon transitions. *J. Korean Phys. Soc.*, **47** (1), 54-62.
54. Nguyễn Thị Xuân Hoài (2016). *Nghiên cứu các tính chất phi cổ điển, dò tìm đan rối và viễn tải lượng tử của một số trạng thái phi cổ điển mới*. Luận án Tiến sĩ Vật Lý, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế.

55. Stoler D. (1970). Equivalence Classes of Minimum Uncertainty Packets I. *Phys. Rev. D*, **1**, 3217-3219.
56. Kimble H.J., and Walls D.F. (1987). Special issue on squeezed state of the electromagnetic field. *J. Opt. Soc. Am. B*, **4**, 1453 - 1737.
57. Agarwal G. S. (1986). Generation of pair coherent states and squeezing via the competition of four-wave mixing and amplified spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 827 - 830.
58. Trương Minh Đức (2005). *Trạng thái kết hợp phi tuyến K hạt, trạng thái cái quạt, trạng thái kết hợp bộ ba và các tính chất phi cổ điển của chúng*. Luận án Tiến sĩ Vật Lý, Hà Nội.
59. Trần Quang Đạt (2021). *Nghiên cứu các tính chất và ứng dụng của một số trạng thái phi cổ điển ba mode*. Luận án Tiến sĩ Vật Lý, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế.
60. Sudarshan E.C.G. (1963). Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 277-279.
61. Glauber R.J. (1963). Photon correlations. *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 84-86.
62. Barnett S.M., and Radmore P.M. (1997). *Method in theoretical quantum optics*, Oxford University Press.
63. Gerry C.C., and Knight P.L. (2005). *Introductory quantum optics*, Cambridge University press.
64. Scully M.O., and Zubairy M.S. (2001). *Quantum Optics*, Cambridge University Press, New York.

- 65. Kim M.S. (2008). Recent developments in photon-level operations on travelling light fields. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **41**, 133001 (1-18).
- 66. Glauber R.J. (1963). Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. *Phys. Rev. B*, **131**, 2766-2788.
- 67. Agarwal G.S., and Tara K. (1991). Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state. *Phys. Rev. A*, **43**, 492-497.
- 68. Zavatta A., Viciani S., and Ballini M. (2004). Quantum to classical transition with single-photon-added coherent states of light. *Science*, **306**, 660-662.
- 69. Hong L., and Guang-can G. (1999). Nonclassical properties of photon-added pair coherent states. *Acta Phys. Sin. (Overseas Edn)*, **8**, 577-582.
- 70. Yuan H.C., Xu X.X., and Fan H.Y. (2009). Statistical Properties of the Generalized Photon-Added Pair Coherent State. *Int. J. Theor. Phys.*, **48**, 3596-3606.
- 71. An N.B., and Duc T.M. (2002). Generation of three-mode nonclassical vibrational states of ions. *Phys. Rev. A*, **66**, 065401 (1-3).
- 72. Janszky J., Koniorczyk M. and Gábris A. (2001). One-complex-plane representation approach to continuous variable quantum teleportation. *Phys. Rev. A*, **64**, 034302 (1-4).
- 73. Rempe G., Walther H., and Klein N. (1987). Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 353-356.

74. Abdel-Aty M., Furuichi S., and Obada A-S.F. (2002). Entanglement degree of a nonlinear multiphoton Jaynes-Cummings model. *J. Opt. B: Quantum Semiclas. Opt.*, **4**, 37-43.
75. Shore B.W., and Knight P.L. (1993). Topical Review The Jaynes - Cummings model. *J. Mod. Opt.*, **40**, 1195-1238.
76. Abdalla M.S. , Abdel-Aty M., and Obada A-S.F. (2003). Entropy and entanglement of time dependent two-mode Jaynes-Cummings model. *Physica A*, **326**, 203-219.
77. Obada A-S.F., Heissian H.A., and Mohamed A.B.A. (2008). Effect of phase-damped cavity on dynamics of tangles of a nondegenerate two-photon JC model. *Opt. Commun.* **281**, 5189-5193.
78. Peixoto de Faria J.G., and Nemes M.C. (2004). Aspects of the dynamics of a two-level atom dispersively coupled to a damped and driven field mode. *Phys. Rev. A*, **69**, 01-11.
79. Puri R.R. (2001). *Mathematical Methods of Quantum Optics*. Springer, Berlin.
80. Agarwal G.S., and Biswas, A. (2005). Quantitative measures of entanglement in pair coherent states. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **7**, 350-361.
81. Gou S.C. (1990). Time evolution of a two-mode Jaynes-Cummings model in the presence of pair-coherent states. *J. Mod. Opt.*, **37**, 1469-1486.
82. Thanh L.T.H., and Duc T.M. (2022). Dynamical properties of the field in generalized photon-added pair coherent state. *Int. J. Theor. Phys.*, **61**, (1-13).

83. Pathak A., and Garcia M. (2000). Control of higher order antibunching. *Appl. Phys. B*, **84**, 479-484.
84. Lê Thị Hồng Thanh và Trương Minh Đức (2022). Các tính chất động lượng tử của trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon trong mô hình Jaynes-Cummings hai mode. *Tạp chí Khoa học Đại học Huế: Khoa học Tự nhiên*, **131** (1C).
85. Genoni M.G., Palma M.L. et. al. (2013). Detecting quantum nonGaussianity via the Wigner function. *Phys. Rev. A*, **87**, 062104.
86. Walschaers M., Fabre C., Parigi V., and Trep N. (2017). Entanglement and Wigner function negativity of multimode non-Gaussian states. *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 183601.
87. Peixoto J.G., and Nemes M.C. (1999). Dissipative dynamics of the Jaynes-Cummings model in the dispersive approximation: Analytical results. *Phys. Rev. A*, **59**, 3918-3925.
88. Tavassoly M.K., Daneshmand R., and Rustae N. (2018). Entanglement dynamics of linear and nonlinear interaction of two two-level atoms with a quantized phase-damped field in the dispersive regime. *Int. J. Theor. Phys.*, **57**, 1645-1658.
89. Le Thi Hong Thanh, Ho Sy Chuong and Truong Minh Duc (2022). Enhancement of dynamical entanglement in a dispersive two-mode Jaynes-Cummings model via superposition of photon-added pair coherent state. *Opt. Quant. Electron.* (Submitted).
90. Bennett C.H., Brassard G., Crépeau C., Jozsa R., Peres A., and Wootters W. K. (1993). Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, **70**(13), 1895-1899.

91. Cardoso W.B., Avelar A.T., Baseia B., and de Almeida N.G. (2005). Teleportation of entangled states without Bell-state measurement. *Phys. Rev. A*, **72** (4), 045802.
92. dSouza A.D., Cardoso W.B. et al. (2009). A note on approximate teleportation of an unknown atomic state in the two-photon Jaynes-Cummings model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **388**, 1331-1336.
93. Bouwmeester D., Pan J.W., Mattle K., Eibl M., Weinfurter H., and Zeilinger A. (1997). Experimental quantum teleportation. *Nature*, **390**, 575-581.
94. Metwally N., Abdelaty M., and Obada A.-S.F. (2005). Entangled states and information induced by the atom-field interaction. *Opt. Commun.*, **250**, 148-156.
95. dSouza A.D, Cardoso W.B, Avelar A.T., and Baseia B. (2011). Teleportation of entangled states without Bell-state measurement via a two-photon. *Opt. Commun.*, **284**, 1086-1089.
96. Zheng S.-B. (1999). Teleportation of atomic states via resonant atom-field interaction. *Opt. Commun.*, **167**, 111-113.
97. Liu J.M., and Weng B. (2006). Approximate teleportation of an unknown atomic state in the two-photon Jaynes-Cummings model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **367**, 215-219.
98. Horodecki M., Horodecki P., and Horodecki R. (1999). General teleportation channel, singlet fraction, and quasidistillation. *Phys. Rev. A*, **396**, 1888-1898.

99. Le Thi Hong Thanh, Phan Ngoc Duy Tinh and Truong Minh Duc (2022). Quantum teleportation of entangled states via generalized photon-added pair coherent state. *DaLat University Journal of Science* (Accepted).

PHỤ LỤC

P1. Chứng minh biểu thức (3.3)

$\mathcal{N}_{qkl}$ là hệ số chuẩn hóa, được xác định từ điều kiện chuẩn hóa

$$\langle \xi, q; k, l | \xi, q; k, l \rangle = 1 \quad (\text{P.1})$$

Ta có

$$\begin{aligned} \langle \xi, q; k, l | \xi, q; k, l \rangle &= |N_{qkl}|^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\xi^{*n}}{[n!(n+q)!]^{1/2}} \frac{\sqrt{(n+q+k)!}}{\sqrt{(n+q)!}} \langle n+q+k, n | \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi^{*n}}{[n!(n+q)!]^{1/2}} \frac{\sigma \sqrt{(n+l)!}}{\sqrt{n!}} \langle n+q, n+l | \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\xi^m}{[m!(m+q)!]^{1/2}} \frac{\sqrt{(m+q+k)!}}{\sqrt{(m+q)!}} |m+q+k, m\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi^m}{[m!(m+q)!]^{1/2}} \frac{\sigma \sqrt{(m+l)!}}{\sqrt{m!}} |m+q, m+l\rangle \right\}, \\ &= |N_{qkl}|^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{|\xi^n|^2 (n+q+k)!}{n![(n+q)!]^2} + \frac{|\xi^n|^2 \sigma^2 (n+l)!}{(n!)^2 (n+q)!} \right] \right. \\ &\quad + \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\xi^{*n} \xi^m \sigma \sqrt{(n+q+k)! (m+l)!}}{(n+q)! m! \sqrt{n! (m+q)!}} \delta_{n+k,m} \delta_{n,m+l} \\ &\quad \left. + \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\xi^{*n} \xi^m \sigma \sqrt{(m+q+k)! (n+l)!}}{(m+q)! n! \sqrt{m! (n+q)!}} \delta_{m+k,n} \delta_{m,n+l} \right\} \quad (\text{P.2}) \end{aligned}$$

Do q, k, l là các số nguyên dương nên chỉ số delta Kronecker trong biểu thức trên xảy ra hai trường hợp khi $k = l = 0$ và $k, l \neq 0$.

Khi $k = l = 0$, ta có

$$\begin{aligned} \langle \xi, q; 0, 0 | \xi, q; 0, 0 \rangle &= |N_{q00}|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\xi|^{2n} \frac{(1+\sigma)^2}{n!(n+q)!} = 1 \\ \Rightarrow N_{q00} &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} (1+\sigma)^2 \right\}^{-1/2} \quad (\text{P.3}) \end{aligned}$$

Khi $k, l \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned}
\langle \xi, q; k, l | \xi, q; k, l \rangle &= |N_{qkl}|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\xi|^{2n} \left[\frac{(n+q+k)!}{n![(n+q)!]^2} + \frac{\sigma^2(n+l)!}{(n!)^2(n+q)!} \right] \\
&= 1 \\
\Rightarrow N_{qkl} &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} \left[\frac{(n+q+k)!}{(n+q)!} + \frac{\sigma^2(n+l)!}{n!} \right] \right\}^{-1/2}
\end{aligned} \tag{P.4}$$

Trường hợp tổng quát, ta có thể viết lại hệ số chuẩn hóa như sau

$$N_{qkl} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} \left[\frac{(n+q+k)!}{(n+q)!} + \frac{\sigma^2(n+l)!}{n!} + 2\sigma\delta_{k,l,0} \right]. \tag{P.5}$$

P2. Chứng minh biểu thức (3.9)

Thay $\hat{\rho}_{ab}$ từ (3.8) vào (3.7), chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
W &= \frac{4e^{2(|\alpha_a|^2+|\alpha_b|^2)}}{\pi^4} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{r,s=1}^2 \left[\frac{C_{s,n}C_{r,m}^*(-1)^{a_s+b_s}}{\sqrt{(m+a_r)!(m+b_r)!(n+a_s)!(n+b_s)!}} \right. \\
&\quad \times \left. \int d^2\gamma_a d^2\gamma_b e^{2(\gamma_a^*\alpha_a+\gamma_b^*\alpha_b-\gamma_a\alpha_a^*-\gamma_b\alpha_b^*)} e^{-|\gamma_a|^2-|\gamma_b|^2} \gamma_a^{*n+a_s} \gamma_b^{*n+b_s} \gamma_a^{m+a_r} \gamma_b^{m+b_r} \right]
\end{aligned} \tag{P.6}$$

biểu thức (P.6) có dạng sau

$$\begin{aligned}
W &= \frac{4e^{2(|\alpha_a|^2+|\alpha_b|^2)}}{\pi^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{r,s=1}^2 \frac{C_{s,n}C_{r,m}^*(-1)^{a_s+b_s}}{\sqrt{(m+a_r)!(m+b_r)!(n+a_s)!(n+b_s)!}} \\
&\quad \times \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma_a e^{2(\gamma_a^*\alpha_a-\gamma_a\alpha_a^*)} e^{-|\gamma_a|^2} \gamma_a^{*n+a_s} \gamma_a^{m+a_r} \frac{1}{\pi} \\
&\quad \times \int d^2\gamma_b e^{2(\gamma_b^*\alpha_b-\gamma_b\alpha_b^*)} e^{-|\gamma_b|^2} \gamma_b^{*n+b_s} \gamma_b^{m+b_r} \\
&= \frac{4e^{2(|\alpha_a|^2+|\alpha_b|^2)}}{\pi^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{r,s=1}^2 \frac{C_{s,n}C_{r,m}^*(-1)^{a_s+b_s} J_a J_b}{\sqrt{(m+a_r)!(m+b_r)!(n+a_s)!(n+b_s)!}},
\end{aligned} \tag{P.7}$$

trong đó chúng tôi đã đặt

$$\begin{aligned} J_a &= \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma_a e^{2(\gamma_a^* \alpha_a - \gamma_a \alpha_a^*)} e^{-|\gamma_a|^2} \gamma_a^{*n+a_s} \gamma_a^{m+a_r}, \\ J_b &= \frac{1}{\pi} \int d^2\gamma_b e^{2(\gamma_b^* \alpha_b - \gamma_b \alpha_b^*)} e^{-|\gamma_b|^2} \gamma_b^{*n+b_s} \gamma_b^{m+b_r}. \end{aligned} \quad (\text{P.8})$$

Chúng tôi khảo sát một tích phân được xác định bởi

$$J = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta \left(e^{-|\beta|^2 + \alpha\beta^*} (\beta^*)^q \right) (e^{-\alpha^*\beta} \beta^l). \quad (\text{P.9})$$

Bằng cách sử dụng một tích phân phức

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\beta e^{-|\beta|^2 + \alpha\beta^*} (\beta^*)^n [f(\beta)] = (\partial/\partial\alpha)^n [f(\alpha)], \quad (\text{P.10})$$

tích phân trong biểu thức (P.9) được cho như sau

$$J = (\partial/\partial\alpha)^q [e^{-\alpha^*\alpha} \alpha^l]. \quad (\text{P.11})$$

Từ định nghĩa của đa thức Laguerre

$$L_n^i(z) = \frac{z^{-i} e^z}{n!} (d/dz)^n (e^{-z} z^{n+i}), \quad (\text{P.12})$$

và đặt $|\alpha|^2 = y$, ta có $\alpha = y/\alpha^*$ hoặc $(\partial/\partial\alpha)^q = (\alpha^*)^q (\partial/\partial y)^q$. Vì vậy tích phân trong biểu thức (P.9) có dạng

$$J = q! (-|\alpha|^2)^{-q} L_q^{(-l)-q}(|\alpha|^2) (-1)^q \alpha^l (\alpha^*)^q e^{-|\alpha|^2}. \quad (\text{P.13})$$

Sử dụng mối tương quan giữa hàm Laguerre và hàm siêu bội

$${}_2F_0(-n, b; ; -1/z) = n! (-z)^{-n} L_n^{-b-n}(z), \quad (\text{P.14})$$

ta có

$$J = (-1)^q \alpha^l (\alpha^*)^q e^{-|\alpha|^2} {}_2F_0(-q, -l; ; -1/|\alpha|^2). \quad (\text{P.15})$$

Từ biểu thức (P.14) và các tích phân trong biểu thức (P.7) ta có

$$\begin{aligned} J_a J_b &= (-1)^{a_s+b_s} e^{-|2\alpha_a|^2 - |2\alpha_b|^2} (2\alpha_a 2\alpha_b)^m (2\alpha_a^* 2\alpha_b^*)^n \\ &\quad \times (2\alpha_a)^{a_r} (2\alpha_a^*)^{a_s} (2\alpha_b)^{b_r} (2\alpha_b^*)^{b_s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times {}_2F_0(-n - a_s, -m - a_r; ; -1/|2\alpha_a|^2) \\
& \times {}_2F_0(-n - b_s, -m - b_r; ; -1/|2\alpha_b|^2) \\
& = (-1)^{a_s+b_s} e^{-|2\alpha_a|^2 - |2\alpha_b|^2} (2|\alpha_a|)^{m+n+a_r+a_s} (2|\alpha_b|)^{m+n+b_r+b_s} \\
& \times e^{i(m-n)(\varphi_a+\varphi_b)} e^{i(a_r-a_s)\varphi_a} e^{i(b_r-b_s)\varphi_b} \\
& \times {}_2F_0(-n - a_s, -m - a_r; ; -1/|2\alpha_a|^2) \\
& \times {}_2F_0(-n - b_s, -m - b_r; ; -1/|2\alpha_b|^2) .
\end{aligned} \tag{P.16}$$

Thay (P.16) vào (P.7), hàm Wigner được xác định như sau

$$\begin{aligned}
W &= \frac{4e^{-2|\alpha_a|^2 - 2|\alpha_b|^2}}{\pi^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{r,s=1}^2 \frac{C_{s,n} C_{r,m}^* (2|\alpha_a|)^{m+n+a_r+a_s} (2|\alpha_b|)^{m+n+b_r+b_s}}{\sqrt{(m+a_r)!(m+b_r)!(n+a_s)!(n+b_s)!}} \\
& \times e^{i(m-n)(\varphi_a+\varphi_b)} e^{i(a_r-a_s)\varphi_a} e^{i(b_r-b_s)\varphi_b} \\
& \times {}_2F_0(-n - a_s, -m - a_r; ; -1/|2\alpha_a|^2) \\
& \times {}_2F_0(-n - b_s, -m - b_r; ; -1/|2\alpha_b|^2) .
\end{aligned} \tag{P.17}$$

Chú ý rằng $\xi = |\xi|e^{i\phi}$, $\alpha_x = |\alpha_x|e^{i\varphi_x}$ với $x = \{a, b\}$ và các thành phần ảo của hàm Wigner trong (P.17) bị triệt tiêu, vì vậy hàm Wigner trong (P.17) trở thành

$$\begin{aligned}
W &= \frac{4e^{-2|\alpha_a|^2 - 2|\alpha_b|^2}}{\pi^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{r,s=1}^2 \frac{|C_{s,n}| |C_{r,m}| (4|\alpha_a\alpha_b|)^{m+n} |2\alpha_a|^{a_r+a_s} |2\alpha_b|^{b_r+b_s}}{\sqrt{(m+a_r)!(m+b_r)!(n+a_s)!(n+b_s)!}} \\
& \times {}_2F_0(-n - a_s, -m - a_r; ; -1/|2\alpha_a|^2) {}_2F_0(-n - b_s, -m - b_r; ; -1/|2\alpha_b|^2) \\
& \times \cos[(m-n+a_r-a_s)\varphi_a + (m-n+b_r-b_s)\varphi_b - (m-n)\phi] .
\end{aligned} \tag{P.18}$$